9-дәріс

АЙНЫМАЛЫ ТАҢБАЛЫ МҮШЕЛІ ҚАТАРЛАР. ҚАТАРЛАРДЫ КӨБЕЙТУ

$\sum a_n$ сандық қатары берілсін. Келесі үш жағдайдың біреуі және тек біреуі ғана мүмкін:

1) қатар мүшелері бір таңбалы — бәрі де теріс емес не бәрі оң емес,

2) қатар мүшелерінің арасында оң және теріс таңбалы мүшелер бар, бірақ теріс (не оң) таңбалы мүшелер саны ақырлы,

3) қатар мүшелерінің арасында оң таңбалысы да, теріс таңбалысы да ақырсыз.

Жалпы жағдайдағы сандық қатар жинақталуының Коши критерийі. *$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ қатары жинақталуы үшін әр ε оң саны бойынша $k_\varepsilon \le p \le q$ шартын қанағаттандыратын барлық p және q бүтін сандары үшін*

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалатындай k_ε нөмірі табылуы қажетті де жеткілікті.

1-с а л д а р . *Егер $\sum a_n$ қатары жинақталса, онда оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады.*

2 - с а л д а р . *$\sum a_n$ қатары жинақталмауы үшін белгілі бір $\bar{\varepsilon}$ оң саны мен кез келген k оң бүтін саны үшін $k \le \bar{p}_k \le \bar{q}_k$, $\left| \sum_{n=\bar{p}_k}^{\bar{q}_k} a_n \right| \ge \bar{\varepsilon}$ шарттарын қанағаттандыратын $\bar{p}_k$ және $\bar{q}_k$ оң бүтін сандары табылуы қажетті де жеткілікті.*

Теорема (Абель түрлендіруі). $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ және $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ тізбектері берілсін. n=0,1,2,… үшін $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ болып, өзіміз $A_{-1} := 0$ деп келісейік. Онда әр $0 \le p \le q$ үшін

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

теңдігі орындалады. Осы теңдігі *Абель түрлендіруі* деп аталады.

Теорема (Лейбниц теоремас). $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *сандық қатары берілсін. Егер қайсыбір* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *және* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *сандық тізбектері үшін*

a) әр n нөмірі үшін $c_n = a_n b_n$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *қатарының* $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *дербес қосындыларынан құрылған тізбек шенелген,*

c) $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$,

d) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

шарттары орындалса, онда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *қатары жинақталады.*

С а л д а р. (Лейбниц теоремасы). $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *тізбегі кемімелі болып, нөлге ұмтылсын. Онда* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *қатары жинақталады.*

Теорема (Абель белгісі). $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *сандық қатары берілсін. Егер қайсыбір* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *және* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *сандық тізбектері үшін*

a) әр n нөмірі үшін $c_n = a_n b_n$ *теңдігі орындалса,*

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *қатары жинақталса,*

c) $\{b_n\}$ *-монотонды тізбек болса,*

d) $\{b_n\}$*—шенелген тізбек, яғни белгілі бір* $c>0$ *саны үшін* $|b_n| \leq c$ *(n=0,1,...) болса,*

онда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *қатары жинақталады.*

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ сандық қатары берілсін. Егер осы қатардың әр мүшесін оның абсолютті шамасына алмастырғанда пайда болатын теріс емес мүшелі $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ қатары жинақталса, онда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ қатары *абсолютті жинақталады* дейді.

Т е о р е м. *Абсолютті жинақталатын қатар жинақталады.*

Сандық қатарларды көбейту. Мертенс теоремасы. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сандық қатарлары берілсін. Бұлардың көбейтіндісі деген не? Бұл сұраққа әртүрлі жауап беруге болады екен (келесі пунктті қараңыз). Соның бірі – *қатарлардың Коши көбейтіндісі* деп аталатын келесі көбейтінді: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ мен $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *сандыққатарларыныңкөбейтіндісі*депбіріншімүшесі $c_0 = a_0 b_0$, екінші

мүшесі $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, жалпы n-шімүшесі$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$болатын$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ қатарыаталады.

Мертенс теоремасы. *Екі жинақталатын қатардың кемінде біреуі абсолютті жинақталса, онда олардың Коши көбейтіндісі жинақталады. Дәл айтқанда, егер,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *және* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *болып,* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *жинақталса, онда* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *болғандағы* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ *қатары жинақталады да,оның қосындысы көбейткішқатарлардыңқосындыларының көбейтіндісіне тең: C=AB.*

Сандық қатарлар көбейтіндісінің жалпы анықтамасы.

$\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ ақырлы жиыншалар тізбегі келесі шарттарды қанағаттандырсын: 1)егер $k_1 \neq k_2$ болса, онда $\Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \emptyset$, яғни Ω_k жиындары өзара қиылыспасын; 2) $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$ болсын, яғни Ω жиынының әр нүктесі Ω_k жиындарының біреуінде, 1) бойынша тек біреуіндеғана жатсын. Онда осы $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ тізбегіне сәйкес $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ және $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ *қатарларының көбейтіндісі* деп жалпы мүшесі $c_k = \sum_{(n,m)\in\Omega_k} a_n b_m$ (яғни c_k деген *(n,m)* нүктесі Ω_k жиынында жататын барлық $a_n \cdot b_m$ көбейтінділерінің қосындысы) болатын $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ қатары аталады.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.