Дәріс 7

САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

Дәріс құрылымы

1. Сандық қатар және дербес қосындылар
2. Қатардың жинақталуы және қосындысы
3. Геометриялық қатар
4. Қатарларды санға көбейту және қосу
5. Қалдық қатар және қатар мүшелерін топтау
6. Жинақталудың қажетті шарты

Сандық қатардың анықтамасы

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегі берілсін.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

символы сандық қатар деп аталады. Мұндағы a_n нақты санын (1) қатарының n-ші не n-нөмірлі мүшесі деп атайды.

Кейде, n – кез келген нөмір деп ұйғарылғанда, a_n мүшесін (1) қатарының жалпы мүшесі деп атайды.

Дербес қосындылар

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

теңдігі бойынша анықталған S_n санын сол қатардың n-ші не n-нөмірлі дербес қосындысы деп атайды.

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Қатардың жинақталуы

Егер $\{S_n\}_{n=1}\infty$ сандық тізбегінің нақты мәнді шегі бар болса, оны a деп белгілейік, онда (1) қатары жинақталады дейді, a санын (1) қатарының қосындысы дейді.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a, \qquad a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Бұл жағдайда «(1) қатары a санына жинақталады» деп те атайды.

Жинақсыз қатар

Қалған жағдайлардың әрқайсысында, яғни $\{S_n\}_{n=1}\infty$ тізбегінің $+\infty$, $-\infty$ не ∞ ақырсыз шектері бар не ешқандай да шегі болмағанда, (1) қатары жинақталмайды, не жинақсыз дейді.

Геометриялық қатар

q нақты саны беріліп, $a_n = q^n$ (n = 0, 1, …) болсын, яғни геометриялық прогрессия берілсін. Бұл тізбекке сәйкес

$$1 + q + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad (2)$$

қатарын қарастырайық.

Геометриялық қатардың дербес қосындысы

q ≠ 1 болғанда барлық n = 0, 1, … үшін

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Геометриялық қатардың қосындысы

Сондықтан |q| < 1 үшін

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

$$1 + q + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1$$

Геометриялық қатардың жинақсыз жағдайлары

|q| > 1 үшін (2) қатары жинақталмайды.

q = 1 үшін (2) қатары

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

қатарына айналады. Бұл жағдайда да жинақталмайды.

1°. Қатарды санға көбейту

Егер $c \neq 0$ саны берілсе, онда $\sum a_n$ және $\sum ca_n$ қатарлары не екеуі де бірдей жинақталады не жинақталмайды. Олар жинақталған жағдайда $\sum ca_n$ қатарының қосындысы $\sum a_n$ қатарының қосындысы мен c санының көбейтіндісіне тең.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2°. Қатарларды қосу

Егер $\sum a_n$ және $\sum b_n$ қатарлары жинақталса, онда олардың қосындысы болатын $\sum(a_n + b_n)$ қатары да жинақталады және де қосындысы алғашқы екі қатардың қосындысына тең.

Қатарларды қосу: жинақсыз жағдайлар

Егер $\sum a_n$ қатары жинақталып, $\sum b_n$ қатары жинақталмаса немесе $\sum b_n$ қатары жинақталып, $\sum a_n$ қатары жинақталмаса, онда $\sum(a_n + b_n)$ қатары жинақталмайды.

$\sum a_n$ және $\sum b_n$ қатарлары жинақталмаған жағдайда $\sum(a_n + b_n)$ қатары жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.

3°. Қалдық қатар

Қатар жинақталуы үшін оның әр қалдық қатары жинақталуы қажетті де жеткілікті.

Салдар. Қатар өзінің әрбір мүшесімен анықталса да, оның жинақталуы не жинақталмауы әр жеке мүшенің қандай екеніне тәуелсіз.

4°. Қатардың қалдығы

Егер қатар жинақталса, онда оның қалдығы, яғни қалдық қатарының қосындысы, нөлге ұмтылады.

$$\lim_{n\to\infty}(a-S_n)=0$$

5°. Қатар мүшелерін топтау

(1) қатары a санына жинақталып, $m = p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$ бүтін сандарының өспелі $\{p_k\}_{k=1}\infty$ тізбегі берілсін. Егер де (1) қатарының мүшелерін былай топтасақ:

$$(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{p_2}) + (a_{p_2+1} + \cdots + a_{p_3}) + \cdots \qquad (3)$$

онда бұл жаңа қатар да жинақталып, қосындысы алғашқы қатар қосындысына тең.

Топталған қатар туралы теорема

Теорема. Егер (3) қатары жинақталып, ондағы әр жақшаның ішіндегі қосылғыштар бір таңбалы болса, онда (1) қатары жинақталады.

Жинақталудың қажетті шарты

Теорема. Егер сандық қатар жинақталса, онда оның жалпы мүшесінің шегі бар және нөлге тең.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.

2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.

3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.

5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.