EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 6

РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Дәріс құрылымы

1. Қисық және оның параметрлік берілуі
2. Қисық ұзындығының анықтамасы
3. Қисық ұзындығын Риман интегралы арқылы есептеу
4. Интегралды жуықтап есептеу
5. Тіктөртбұрыштар әдісі
6. Трапециялар әдісі

Қисықтың анықтамасы

Анықтама. [a,b] сегментінде анықталған, үзіліссіз x(t) және y(t) функцияларының реттелген жұбы қисық деп аталады.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad a \le t \le b$$

t сандық айнымалысын қисықтың параметрі, не қысқаша параметр деп атайды.

Қисықтың геометриялық бейнесі

$$L \equiv \{(x(t), y(t)) : a \le t \le b\}$$

$$\gamma(a) = (x(a), y(a)), \qquad \gamma(b) = (x(b), y(b))$$

γ(a) нүктесі γ қисығының бастапқы нүктесі, ал γ(b) – соңғы нүктесі деп аталады.

$a \le t_1 < t_2 \le b$ үшін $\gamma(t_1)$ нүктесі γ қисығы бойында $\gamma(t_2)$ нүктесінің алдында орналасқан.

Қисықтың айқын түрде берілуі

x(t) = t болған дербес жағдайда γ қисығы y = y(x) функциясының графигімен беттеседі.

$$\gamma(t) = (t, y(t)), \qquad a \le t \le b$$

Қисықтың бір функция y = y(x), a ≤ x ≤ b ретінде берілуін кейде қисықтың айқын түрде берілуі деп атайды.

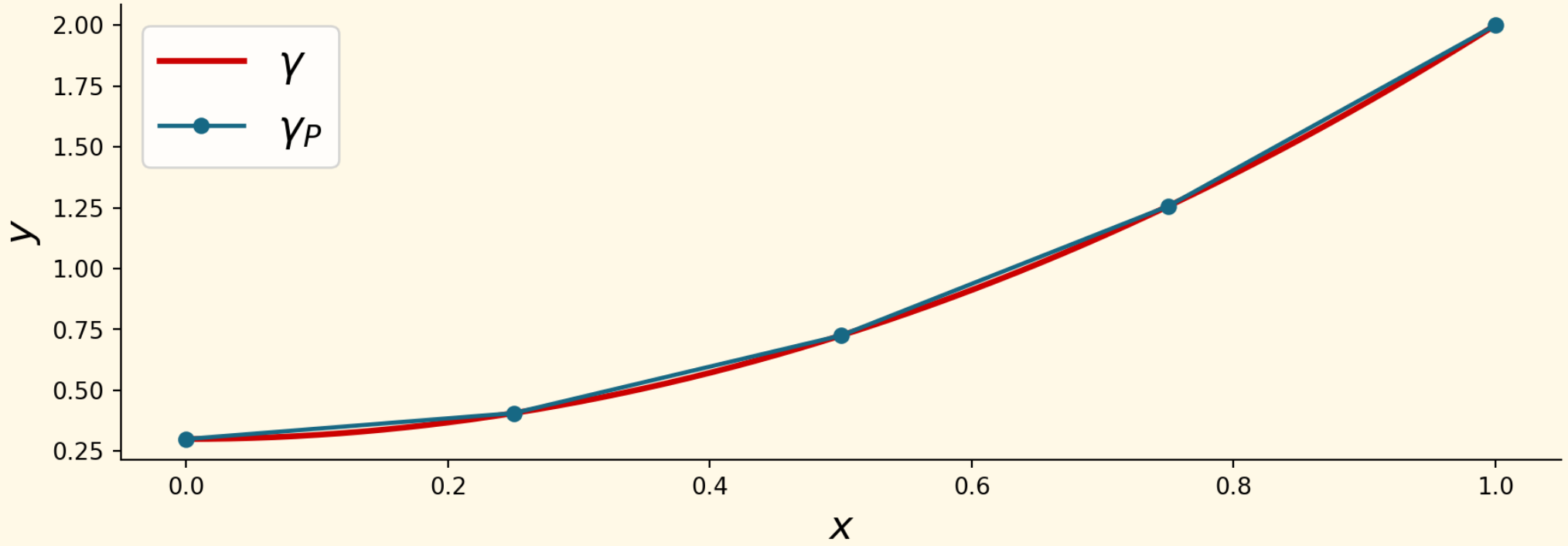
Қисық ұзындығының анықтамасы

[a, b] сегментінде γ = γ(t) ≡ (x(t), y(t)) қисығы берілсін. Әрбір P = {a = t_0 < t_1 < … < t_n = b} бөлшектенуі үшін:

$$K(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \quad (2)$$

K(γ, P) саны γ_p сынық сызығының ұзындығына тең.

Қисықты сынық сызықпен жуықтау



Әрбір $\gamma(t_{i-1})$ мен $\gamma(t_i)$ нүктелерін түзу бойымен жалғаймыз.

Қисықтың ұзындығы

Осындай K(γ, P) сандарынан құрылған жиынның супремумы γ қисығының ұзындығы деп аталады.

$$K(\gamma) = \sup_{P} K(\gamma, P) = \sup_{a=t_0 < \cdots < t_n = b} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Қисық ұзындығын Риман интегралы арқылы есептеу

Теорема. Егер [a, b] сегментінде анықталған x(t) және y(t) функцияларының әрқайсысының туындылары бар және олар үзіліссіз болса, онда x(t) мен y(t) анықтайтын γ қисығының ұзындығы

$$K(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[x\prime(t)]^2 + [y\prime(t)]^2}\, dt. \qquad (4)$$

түріндегі Риман интегралы арқылы бейнеленеді.

1-салдар

1-салдар. Егер y қисығын анықтайтын $x(t)$ мен $y(t)$ функцияларының әрқайсысының $[a, b]$ сегментінің әрбір нүктесінде үзіліссіз болатын туындысы бар болса, онда y түзелетін қисық.

2-салдар: айқын түрде берілген қисық

2-салдар. Егер y қисығы туындысы бар және үзіліссіз $y = y(x)$, $a \le x \le b$ функциясы арқылы айқын түрде берілсе, онда оның ұзындығы

$$\int_a^b \sqrt{1 + [y\prime(x)]^2}\, dx \qquad (14)$$

санына тең болады.

Интегралды жуықтап есептеу

Лемма. φ функциясы [c, d] сегментінде үзіліссіз болсын. Онда [c, d] сегментінде жатқан кез келген t_1, t_2, …, t_n сандары үшін

$$\frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2) + \cdots + \varphi(t_n)}{n} = \varphi(\xi)$$

теңдігі орындалатын ξ ∈ [c, d] саны табылады.

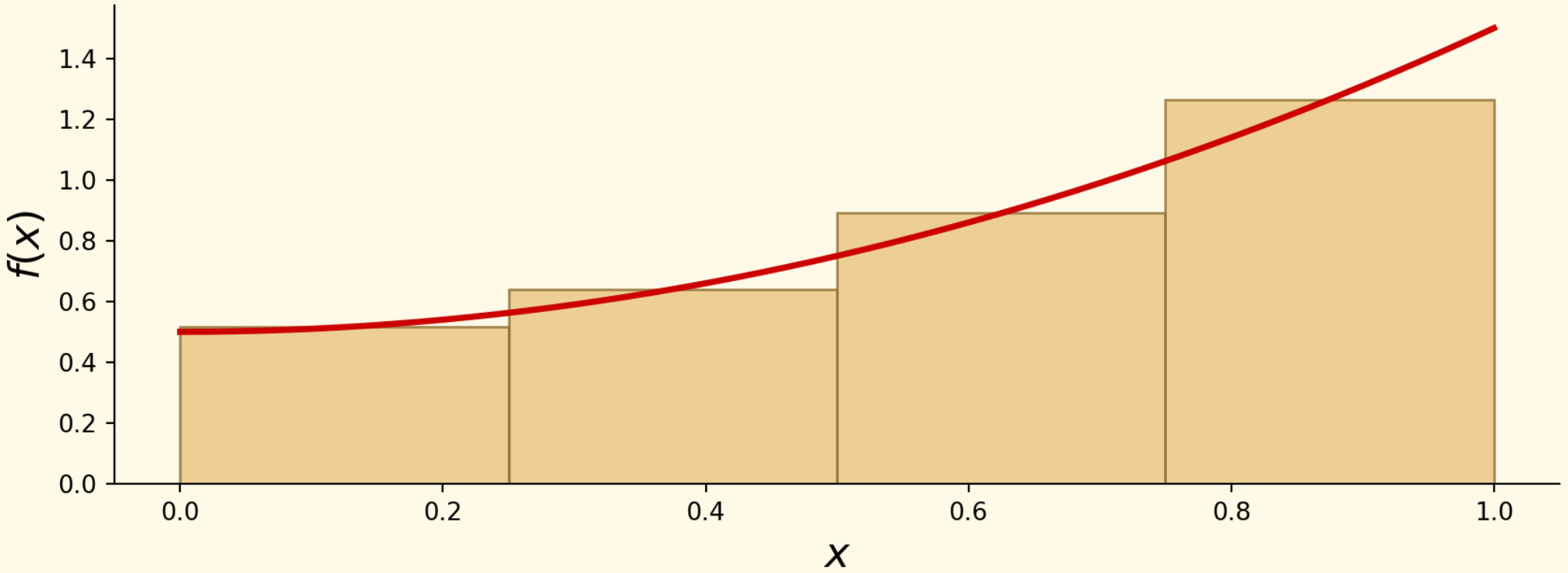
Тіктөртбұрыштар әдісі

$P_0(x)$ көпмүшелігі f функциясымен [α, β] сегментінің ортасы болатын (α + β)/2 нүктесінде беттесетін болсын.

$$P_0(x) = c_0 = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(\beta - \alpha) + R$$

Тіктөртбұрыштар әдісінің геометриялық мағынасы



f ≥ 0 болғанда жуықтау санының геометриялық мағынасы – тіктөртбұрыштардың аудандарының қосындысы.

Тіктөртбұрыштар формуласы

[a, b] сегментінде f функциясының екінші туындысы бар және ол үзіліссіз болсын. Оң бүтін n саны беріліп, [a, b] сегментін өзара тең 2n сегменттерге жіктейік:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

Тіктөртбұрыштар әдісінің қателігі

Қайсыбір ξ ∈ [a, b] үшін:

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

$$M = \sup_{a \le \xi \le b} |f''(\xi)|, \qquad |R| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M < \varepsilon$$

Осы теңсіздікті қанағаттандыратын n саны үшін квадратуралық формула интегралды ε дәлдігімен жуықтайды.

Тіктөртбұрыштар квадратуралық формуласы

$$\frac{b-a}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{2n}\right)+f\left(a+3\frac{b-a}{2n}\right)+\cdots+f\left(b-\frac{b-a}{2n}\right)\right]$$

Бұл квадратуралық формула $\int_a^b f(x)dx$ интегралын ε дәлдігімен жуықтайды.

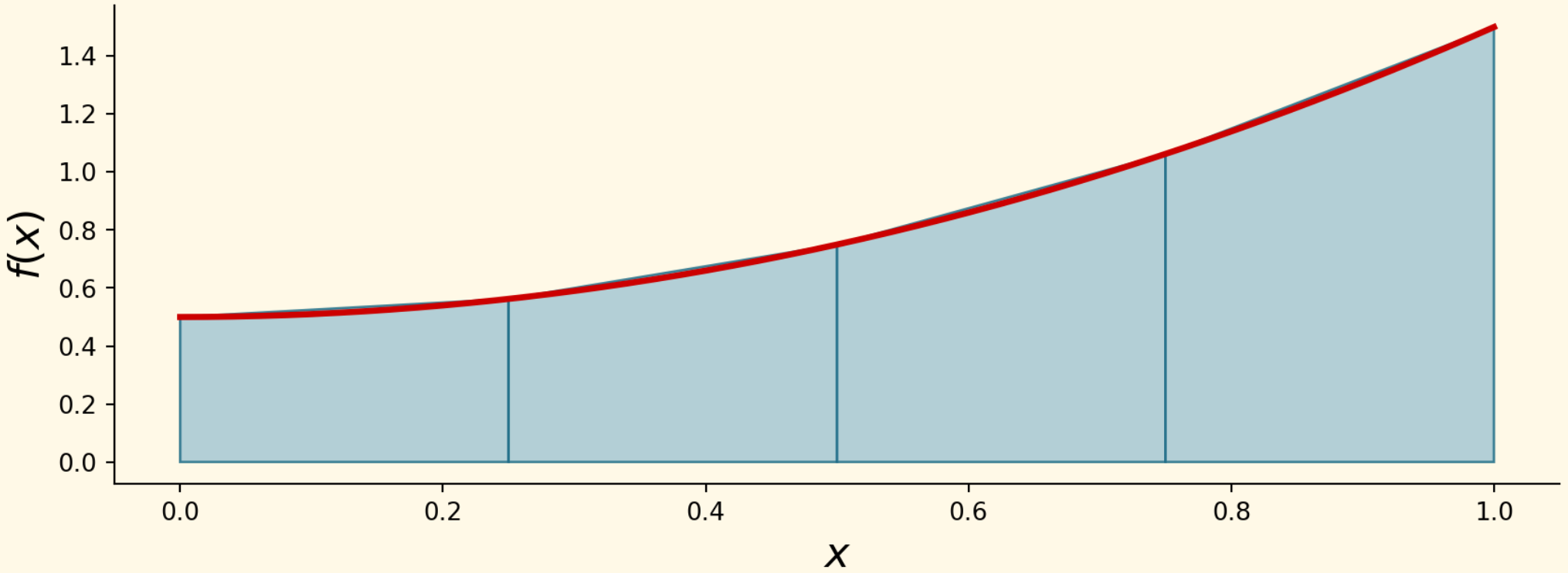
Трапециялар әдісі

f функциясының [a, b] сегментінде екінші туындысы бар және ол үзіліссіз болсын. [a, b] сегментін ұзындықтары бірдей, саны n болатын сегменттерге бөлеміз:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

Трапециялар әдісінің геометриялық мағынасы



Әрбір бөлікте қисықтың доғасын оның шеткі нүктелерін қосатын кесіндімен алмастырамыз.

Трапециялар формуласы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] + R$$

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \qquad \xi \in [a, b]$$

Лемма бойынша екінші туындылардың орташа мәнін қайсыбір ξ ∈ [a, b] нүктесіндегі мәнмен өрнектеуге болады.

Трапециялар әдісінің қателігі

$$M = \sup_{a \le \xi \le b} |f''(\xi)|$$

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M < \varepsilon$$

Теңсіздікті қанағаттандыратын әрбір оң бүтін n саны үшін трапециялар квадратуралық формуласы интегралды ε дәлдігімен жуықтайды.

Трапециялар квадратуралық формуласы

$$\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+2f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)+f(b)\right]$$

Бұл қосынды $\int_a^b f(x)dx$ интегралын ε дәлдігімен жуықтайды.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.

2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.

3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.

5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.