EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 4

РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ СЫЗЫҚТЫҚ ҚАСИЕТІ, АДДИТИВТІЛІГІ. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛЫ, ТЕҢСІЗДІКТЕН ШЕККЕ КӨШУ

Риман интегралының сызықтық қасиеттері

Риман интегралының сызықтық қасиеттері. Интегралдың сызықтық қасиеттері деп кез келген интегралданатын f_1 мен f_2 функцияларының сызықтық комбинациясы, яғни $c_1f_1 + c_2f_2$ функциясыда интегралданып,

$$c_1\int_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [c_1f_1(x) + c_2f_2(x)]\,dx$$

теңдігі орындалатыны аталады.

1-теорема

1-теорема. Егер f функциясы [a, b] сегментінде интегралданса, онда әрбір c нақты саны үшін cf функциясы да сол сегментте интегралданады да

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

теңдігі орындалады.

2-теорема

2-теорема. Егер f_1 мен f_2 функциялары [a, b] сегментінде интегралданса, онда сол сегментте олардың қосындысы да интегралданып,

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

теңдігін қанағаттандырады.

3-теорема

3-теорема. Егер f_1, f_2, …, f_n функциялары [a, b] сегментінде интегралданса, онда олардың қосындысы болатын $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ функциясы да сол сегментте интегралданып,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

яғни

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\,dx$$

теңдігі орындалады.

4-теорема

4-теорема. Егер [a, b] сегментінде f_1, f_2, …, f_n функциялары интегралданса, онда кез келген c_1, c_2, …, c_n нақты сандары үшін $c_1f_1 + c_2f_2 + … + c_nf_n$ функциясы да интегралданып,

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]\, dx$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\, dx + \cdots + c_n \int_a^b f_n(x)\, dx$$

теңдігі орындалады.

Күрделі функция мен функциялар көбейтіндісінің Риман бойынша интегралдануы

5-теорема. f функциясы [a, b] сегментінде интегралданып, әрбір $x \in [a, b]$ үшін $m \le f(x) \le M$ болсын. Егер φ функциясы [m, M] сегментінде үзіліссіз болса, онда $h(x) = \varphi(f(x))$ күрделі функциясы [a, b] сегментінде интегралданады.

Салдар

Салдар. Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде интегралданса, онда әрбір $\alpha > 0$ үшін $|f(x)|^{\alpha}$ функциясы да сол сегментте интегралданады.

Соның ішінде $\alpha = 1$ болғанда f функциясы мен бірге оның модулі болып табылатын |f| функциясы да интегралданады.

6-теорема

6-теорема. Егер f_1 мен f_2 функциялары [a, b] сегментінде интегралданса, онда олардың көбейтіндісі болатын $f_1 \cdot f_2$ функциясы да сол сегментте интегралданады.

Риман интегралының аддитивтік қасиеті

7-теорема. Егер f функциясы [a, b] сегментінде интегралданса, онда $a < c < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір c саны үшін f функциясы [a, c] және [c, b] сегменттерінде интегралданып,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

теңдігі орындалады.

Салдар

Салдар. f функциясы [a, b] сегментінде интегралданып, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ нүктелері берілсін. Онда f(x) функциясы әрбір $[c_{i-1}, c_i]$ (i = 1, …, n) сегментінде интегралданып,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$$

теңдігі орындалады.

8-теорема

8-теорема. f функциясы [a, b] сегментінде анықталсын. Егер $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ нүктелері [a, b] сегментін әрбір $[t_{i-1}, t_i]$ сегментінде f(x) функциясы интегралданатындай жіктесе, онда f(x) функциясы [a, b] сегментінде интегралданды да

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x)\,dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,dx$$

теңдігі орындалады.

9-теорема

9-теорема. Егер f функциясы [a, b] сегментінде шенелген болып, оның үзіліс нүктелер жиыны бос не ақырлы жиын болса, онда f функциясы [a, b] сегментінде Риман бойынша интегралданады.

Риман интегралының сегменттегі интегралданатын функциялар теңсіздік қатынасын сақтауы

10-теорема. Егер f_1 мен f_2 функциялары [a, b] сегментінде интегралданып, әрбір $x \in [a, b]$ үшін $f_1(x) \geq f_2(x)$ болса, онда

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \geq \int_a^b f_2(x)\,dx$$

1-салдар

1-салдар. Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде интегралданып, әрбір $x \in [a, b]$ үшін $f(x) \geq 0$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

болады.

2-салдар

2-салдар. Егер f функциясы [a, b] сегментінде интегралданса, онда

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

3-салдар

3-салдар. Егер де f функциясы [a, b] сегментінде интегралданып, әрбір $a \le x \le b$ үшін $|f(x)| \le M$ болса,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M(b-a)$$

теңсіздігі орындалады.

4-салдар

4-салдар. Егер де f_1 мен f_2 функциялары [a, b] сегментінде интегралданып, әрбір $x \in [a, b]$ үшін

$$m \le f_1(x) \le M \quad \text{және} \quad f_2(x) \ge 0$$

болса, онда

$$m\int_a^b f_2(x)\,dx \le \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx \le M\int_a^b f_2(x)\,dx$$

11-теорема

11-теорема. Егер f_1 мен f_2 функциялары [a, b] сегментінде интегралданып, әрбір $x \in [a, b]$ үшін сәйкес (40) және (41) теңсіздіктері орындалса, онда

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = \mu \int_a^b f_2(x)\, dx$$

теңдігін қанағаттандыратын $m \le \mu \le M$ саны табылады.

Салдар

Салдар. Егер f функциясы [a, b] сегментінде интегралданып, барлық $x \in [a, b]$ үшін $m \le f(x) \le M$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mu(b - a)$$

(45)теңдігі орындалатындай $m \le \mu \le M$ саны табылады.

Негізгі әдебиеттер

- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
- ✓ Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
- ✓ Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
- ✓ Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.