8-дәріс

ТЕРІС ЕМЕС МҮШЕЛІ САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

Теріс емес мүшелі, яғни барлық n үшін $a_n \geq 0$ *болатын*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

қатары жинақталуы үшін оның дербес қосындылары жоғарыдан шенелуі қажетті де жеткілікті.

Е с к е р т у. Теріс емес мүшелі жинақталатын (1) қатары үшін $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sup\limits_n S_n < +\infty$ болатынына сүйеніп, кейде барлық мүшелері теріс емес таңбалы (1) қатарының жинақталуын белгілеу үшін $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots < +\infty$ теңсіздігі қолданылады.

Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуының интегралдық критерийі.

Т е о р е м а. $[1,+\infty)$ *аралығында үзіліссіз болатын, теріс емес және өспейтін f(x) функциясы берілсін. Онда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *қатары жинақталуы үшін* $A_n \equiv \int\limits_1^n f(x)dx$ *(n=1,2,...) тізбегі шенелген тізбек болуы қажетті де жеткілікті.*

1 - с а л д а р. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *қатары α>1 болғанда жинақталып,* $\alpha \leq 1$ *болғанда жинақталмайды.*

2 - с а л д а р. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ *қатары α≤1 болғанда жинақталмайды, α>1 болғанда жинақталады.*

Т е о р е м а. *Егер белгілі бір* m_0 *үшін* $n \geq m_0$ *болғанда* $0 \leq a_n \leq b_n$ *болса, онда:*

a) $\sum b_n$ *қатары жинақталғанда* $\sum a_n$ *қатары да жинақталады,*

b) $\sum a_n$ *қатары жинақталмағанда* $\sum b_n$ *қатары да жинақталмайды.*

Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Коши белгісі және оның мәселені толық шешпеуі*. Теріс емес мүшелі* $\sum a_n$ *қатары беріліп,* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \equiv \alpha$ *шегі бар болсын. Бұл жағдайда:*

a) егер α<1 болса, онда $\sum a_n$ *қатары жинақталады,*

b) егер α>1болса, онда $\sum a_n$ *қатары жинақталмайды,*

с) егер α=1 болса, онда $\sum a_n$ *қатары жинақталуы не жинақталмауы жөнінде ештеңе айтаалмаймыз. α=1 болатындай жинақталатын да, жинақталмайтын да қатарлар бар.*

Мысалдар.

1^0. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ болсын. Бұнда $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$, демек, қатар жинақталады.

2^0. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$қатарының тақ және жұп нөмірлері үшін

$$a_1=\frac{1}{2^1},\ a_3=\frac{1}{2^2},\ a_5=\frac{1}{2^3},\ \ldots,\ a_{2n+1}=\frac{1}{2^{n+1}},\ \ldots,$$

және

$$a_2=\frac{1}{3^1},\ a_4=\frac{1}{3^2},\ a_6=\frac{1}{3^3},\ \ldots,\ a_{2n}=\frac{1}{3^n},\ \ldots,$$

әрқайсысы өзіндік заңмен өзгереді, сол себептен

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

және

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сөйтіп, *жоғарғы* шек пен *төменгі* шек өзара бөлек болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ жай шегі жоқ, сондықтан Коши белгісінің алғашқы түрін қолдануға болмайды. Бірақ $\alpha=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ теңсіздігіне сүйеніп, Коши белгісінің соңғы жалпы түрі бойынша қатар жинақталады деген қорытындыға келеміз.

Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Даламбер белгісі және оның мәселені толық шешпеуі*. Оң мүшелі* $\sum a_n$ *қатары берілсін.*

a)Егер қайсыбір 0<q<1 саны мен т нөмірі үшін n≥m болғанда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ *болса, онда* $\sum a_n$ *қатары жинақталады,*

b) егер белгілі бір т нөмірі үшін n≥m болғанда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ *болса, онда* $\sum a_n$ *қатары жинақталмайды.*

С а л д а р . *Оң мүшелі* $\sum a_n$ *қатары үшін* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ *шегі бар болса, онда α<1 болғанда қатар жинақталады, α>1 болғанда қатар жинақталмайды, α =1 болғанда жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.*

Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Раабе белгісі және оның мәселені толық шешпеуі.

Р а а б е б е л г і с і . *Оң мүшелі* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сандық қатары берілсін. Егер Раабе тізбегі деп аталатын* $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ *(n=1,2 ...)тізбегі үшін:*

a) қайсыбір т нөмірі мен τ>1 оң саны үшін n≥m болған сайын $R_n \ge \tau$ *болса, онда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатары жинақталады,*

b) қайсыбір т нөмірі үшін n≥m болған сайын $R_n \le 1$ *болса, онда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатары жинақталмайды.*

1 - т е о р е м а . *Оң мүшелі* $\sum a_n$ *қатары жинақталмасын, яғни оның дербес қосындылары үшін* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to +\infty$ *(n→∞)болсын. Онда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ *қатары жинақталмайды да, әр* $\delta > 0$ *сан үшін* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}}$ *қатары жинақталады.*

2 - т е о р е м а . *Оң мүшелі* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатары жинақталсын, яғни оның қалдық қатары қосындылары үшін* $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \to 0$ *(n→∞) болсын. Онда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ *қатары жинақталмайды да, әр 0<δ<1 саны үшін* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^{1-\delta}}$ *қатары жинақталады.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.