7-дәріс
САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегі берілсін.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

символы *сандық қатар* деп аталады. Мұндағы a_n нақты санын (1) қатарының *n-ші* не *n- нөмірлі мүшесі* деп, ал $S_n = a_1 + ... + a_n$ теңдігі бойынша анықталған S_n санын сол қатардың *n-ші* не *n-нөмірлі дербес қосындысы* деп атайды. Кейде, *n* – кез келген нөмір деп ұйғарылғанда, a_n мүшесін (1) қатарының *жалпы мүшесі* деп атайды.

Қатрадың дербес қосындылары тізбек анықтамасына сәйкес $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ сәйкес тізбегін құрайды.

Егер осы $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сандық тізбегінің нақты мәнді шегі бар болса, оны *a* деп белгілейік, онда (1) қатары *жинақталады* дейді, *a* санын (1) қатарының *қосындысы* дейді де, $a = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ деп жазады. Бұл жағдайда *«(1) қатары a санына жинақталады»* деп те атайды. Қалған жағдайлардың әрқасысында, яғни $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегінің $+\infty$, $-\infty$ не ∞ ақырсыз шектері бар не ешқандай да шегі болмағанда, (1) қатары *жинақталмайды*, не *жинақсыз* дейді.

М ы с а л.

1) *q* нақты саны беріліп, $a_n = q^n$ (*n*=0, 1, …) болсын, яғни *геометриялық прогрессия* берілсін. Бұл тізбекке сәйкес

$$1+q+...+q^n+...=\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad (2)$$

қатарын қарастырайық. $q \neq 1$ болғанда барлық *n*=0,1, … үшін

$$S_n = 1 + q + ... + q^n = \frac{1}{1-q}(1-q)(1+q+\cdots+q^n) =$$

$$= \frac{1}{1-q}(1+q+\cdots+q^n-q-\cdots-q^n-q^{n+1}) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Сондықтан $|q|<1$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, яғни

$$1+q+...+q^n+...=\frac{1}{1-q}, \qquad (|q|<1),$$

ал $|q|>1$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, яғни (2) қатары жинақталмайды. q=1 үшін (2) қатары 1+1+…+1+…, қатарына айналады, демек, $S_n = n \to +\infty$ ($n\to\infty$), болғандықтан, бұл жағдайда да жинақталмайды.

1^0. *Егер $c\neq 0$ саны берілсе, онда $\sum a_n$ және $\sum ca_n$ қатарлары не екеуі де бірдей жинақталады не жинақталмайды. Олар жинақталған жағдайда $\sum ca_n$ қатарының қосындысы $\sum a_n$ қатарының қосындысы мен c санының көбейтіндісіне тең.*

2^0. *α) Егер $\sum a_n$ және $\sum b_n$ қатарлары жинақталса, онда олардың қосындысы болатын $\sum(a_n+b_n)$ қатары да жинақталады және де қосындысы алғашқы екі қатардың қосындысына тең,*

β) Егер $\sum a_n$ қатары жинақталып, $\sum b_n$ қатары жинақталмаса немесе $\sum b_n$ қатары жинақталып, $\sum a_n$ қатары жинақталмаса, онда $\sum(a_n+b_n)$қатары жинақталмайды,

γ) $\sum a_n$ және $\sum b_n$ қатарлары жинақталмаған жағдайда $\sum(a_n+b_n)$ қатары жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.

3^0. Қатар жинақталуы үшін оның әр қалдық қатары жинақталуы қажетті де жеткілікті.

С а л д а р. *Қатар өзінің әрбір мүшесімен анықталса да, оның жинақталуы не жинақталмауы әр жеке мүшенің қандай екеніне тәуелсіз.*

4^0. *Егер қатар жинақталса, онда оның қалдығы, яғни қалдық қатарының қосындысы, нөлге ұмтылады.*

5^0. (1) қатары а санына жинақталып, $m=p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots$ бүтін сандарының өспелі $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі берілсін. Егер де (1) қатарының мүшелерін былай

$$(a_{m=p_1}+a_{p_1+1}+\cdots+a_{p_2})+(a_{p_2+1}+\ldots+a_{p_3})+\ldots+(a_{p_k+1}+\cdots+a_{p_{k+1}})+\cdots \qquad (3)$$

топтасақ, онда бұл жаңа қатар да жинақталып, қосындысы алғашқы қатар қосындысына тең.

Т е о р е м а . *Егер (3) қатары жинақталып, ондағы әр жақшаның ішіндегі қосылғыштар бір таңбалы болса, онда (1) қатары жинақталады.*

Т е о р е м а . *Егер сандық қатар жинақталса, онда оның, жалпы мүшесінің шегі бар және нөлге тең.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.

3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.