6-дәріс

РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Анықтама. $[a,b]$ сегментінде анықталған, үзіліссіз $x(t)$ және $y(t)$ функцияларының реттелген жұбы *қисық* деп аталады.

Бұнда «реттелген» деген сөз $x(t)$ *-бірінші*, ал $y(t)$ *-екінші функция* ретінде қарастырылып отырғанын анықтайды. Осындағы t сандық айнымалысын *қисықтың параметрі*, не қысқаша *параметр* деп атайды.

Әрбір $[a,b]$ сегментіндегі әр t санына *бірінші координатасы* $x(t)$, *екінші координатасы* $y(t)$ болатын жазықтықтың $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ нүктесін сәйкес қойсақ (дәл осы жерде $x(t)$ және $y(t)$ функцияларының реттелгендігі пайдаланылады), онда сондай нүктелердің бәрі, яғни $L\equiv\{(x(t),y(t)):a\le t\le b\}$ жиыны, жазықтықта жатқан фигураны құрайды (18-суретті қараңыз). Сол фигура қисықтың геометриялық бейнесі болады да ол үшін *«қисық»* атын сақтап, γ *қисығы* деп атаймыз. $\gamma(a)\equiv(x(a),y(a))$ нүктесі γ *қисығының бастапқы нүктесі,* ал $\gamma(b)\equiv(x(b),y(b))$ *- соңғы нүктесі* деп аталады.

Сонымен қатар, $[a,b]$ сегментінде «*кіші-үлкен*» ұғымы бойынша анықталған *бағыт* түсінігі ($t_1<t_2$ болғанда t_1 нүктесі t_2 нүктесінің *алдында* орналасқан) γ қисығына былай аударылады: $a\le t_1<t_2\le b$ үшін $\gamma(t_1)$ нүктесі γ қисығы бойында $\gamma(t_2)$ нүктесінің *алдында* орналасқан.

$x(t)=t$ болған дербес жағдайда γ қисығы $(x(t),\ y(t))=(t,y(t))\Leftrightarrow a\le t\le b, t\to y(t)\Leftrightarrow a\le x\le b, x\to y(x)$ түрінде жазылып, $y=y(x)$ функциясының графигімен беттеседі. Бұл жағдайды, яғни қисықтың бір функция $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$ ретінде берілуін, кейде *қисықтың айқын түрде берілуі* деп атайды.

Қисық ұзындығының анықтамасы. $[a,b]$ сегментінде $\gamma=\gamma(t)\equiv(x(t),y(t))$ қисығы берілсін. $[a,b]$ сегментінің әрбір $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ бөлшектенуі үшін

$$K(\gamma,P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2} \qquad (2)$$

қосындысын қарастырайық. γ қисығы бойында Р-бөлшектенуіне сәйкес $\gamma(a)=\gamma(t_0),\gamma(t_1),\ldots,\gamma(t_{n-1}),\gamma(t_n)=\gamma(b)$ нүктелерін белгілеп, әрбір $i=1,2,\ldots,n$ үшін $\gamma(t_{i-1})$ мен $\gamma(t_i)$ нүктелерін түзу бойымен жалғайық (20, *а*)-суретті қараңыз). Нәтижесінде пайда болған қисық *сынық сызық* деп аталады да (оны γ_P деп белгілейік) оның ұзындығын анықтау мәселесі $\gamma(t_{i-1})$ мен $\gamma(t_i)$ нүктелерінен өтетін түзудің сол екі нүктенің арасындағы *кесінді* деп аталатын бөлігінің ұзындығын, яғни жазықтықта жатқан $\gamma(t_{i-1})$ және $\gamma(t_i)$ нүктелерінің *арақашықтығын*

анықтау мәселесіне келеді. Пифагор теоремасы бойынша (20, *b*)-суретті қараңыз) ол $\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}$ санына тең, демек, $K(\gamma,P)$ саны γ_P сынық сызығының ұзындығына тең. Осындай $K(\gamma,P)$ сандарынан құрылған жиынның супремумы, яғни

$$K(\gamma)=\sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}=\sup_{P}L(\gamma,P)$$

саны γ *қисығының ұзындығы* деп аталады да, $K(\gamma)$ символымен белгіленеді.

Қисық ұзындығын Риман интегралы арқылы есептеу.

Т е о р е м а . *Егер* $[a,b]$ *сегментінде анықталған* $x(t)$ *және* $y(t)$ *функцияларының әрқайсысының туындылары бар және олар үзіліссіз болса, онда* $x(t)$ *мен* $y(t)$ *анықтайтын* γ *қисығының ұзындығы*

$$K(\gamma)=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \qquad (4)$$

түріндегі Риман интегралы арқылы бейнеленеді.

1 - с а л д а р . *Егер* γ *қисығын анықтайтын* $x(t)$ *мен* $y(t)$ *функцияларының әрқайсысының* $[a,b]$ *сегментінің әрбір нүктесінде үзіліссіз болатын туындысы бар болса, онда* γ *түзелетін қисық.*

2 - с а л д а р . *Егер* γ *қисығы туындысы бар және үзіліссіз* $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$ *функциясы арқылы айқын түрде берілсе, онда оның ұзындығы*

$$\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \qquad (14)$$

санына тең болады.

Интегралды жуықтап есептеу.

Л е м м а . φ *функциясы* $[c,d]$ *сегментінде үзіліссіз болсын. Онда* $[c,d]$ *сегментінде жатқан кез келген* $t_1,t_2,\ldots,t_n$ *сандары үшін*

$$\frac{(\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\ldots+\varphi(t_n)}{n}=\varphi(\xi)$$

теңдігі орындалатын $\xi\in[c,d]$ *саны табылады.*

Тіктөртбұрыштар әдісі. Алдыңғы пункте айтылғандай $s=0$ болғанда $P_s(x)$ көпмүшелігінің жалпы түрі $P_0(x)=c_0x^0=c_0$ яғни нақты сан болады. $P_0(x)$

көпмүшелігі $c_0 = P_0\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ теңдігі арқылы анықталсын, яғни ол f функциясымен $[\alpha,\beta]$ сегментінің ортасы болатын $\frac{\alpha+\beta}{2}$ нүктесінде беттесетін болсын. Сонда $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ интегралы $\int_\alpha^\beta P_0(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)$ санымен жуықталады. $f \geq 0$ болғанда сондағы жуықтау санының да, сол сан әкелген интегралдың геометриялық мағынасы тіктөртбұрыштың ауданы болғандықтан, бұл әдісті *тіктөртбұрыштар әдісі* деп атайды. Осылай жуықтағанда пайда болатын қатені R әрпімен белгілейік, яғни

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \overset{def\ R}{=} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)+R$$

болсын.

Енді $[a,b]$ сегментінде f функциясының екінші туындысы бар және ол үзіліссіз болсын. Оң бүтін n саны беріліп, $[a,b]$ сегментін

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2n}(i = 0,1,...,2n)$$

нүктелерімен өзара тең $2n$ сегменттерге жіктейік. Қайсыбір $\xi \in [a,b]$ үшін

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x=2i}^{x=2i+2} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)\right) =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1})\right] + \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi).$$

.

Бұл теңдікті *тіктөртбұрыштар формуласы* деп атайды. Сөйтіп, ε оң саны беріліп, $\sup_{a\leq\xi\leq b}|f''(\xi)| = M$ болса, онда

$$|R| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}M < \varepsilon$$

теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір оң бүтін n саны үшін

$$\frac{b-a}{n}\left[f(a+\frac{b-a}{2n})+f\left(a+3\frac{b-a}{2n}\right)+...+f\left(b-\frac{b-a}{2n}\right)\right]$$

квадратуралық формуласы $\int_a^b f(x)dx$ интегралын ε дәлдігімен жуықтайды.

Трапециялар әдісі. f функциясының $[a,b]$ сегментінде екінші туындысы бар және ол үзіліссіз болсын. Онда алдымен $[a,b]$ сегментін $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ $x_i = a + i\frac{b-a}{n}\,(i = 0, \ldots, n)$ нүктелерімен ұзындықтары $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ болып, саны n болатын өзара тең $[x_i, x_{i+1}]$ сегменттерге бөліп, содан соң әрбір i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ үшін $\alpha = x_{i+1}$, $\beta = x_i$ болғанда, *трапециялар формуласы* деп аталатын

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) - \frac{f''(\xi_i)}{12}(x_i - x_{i-1})^3\right] =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left\{\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\left[f(x_1+f(x_2)\right]+\ldots+\left[f(x_{n-1}+f(x_n)\right]\right\} - \sum_{i=1}^{n}\frac{f''(\xi_i)}{12n^3}(b-a)^3$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+2f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+2f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)+f(b)\right\} - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

өйткені әр $(i = 1,\ldots,n)$ үшін (11) бойынша $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ шарттарына сәйкес R_i жуықтау қателігі $R_i \equiv -\frac{f''(\xi_i)}{12}(x_i - x_{i-1}) \equiv -\frac{f''(\xi_i)}{n}\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ түрінде жазып сонан соң $\varphi = f'', c = a, d = b, t_i = \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ болғанда қолданылған лемма бойынша қайсыбір $\xi \in [a,b]$ үшін

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{f''(\xi_1)+\ldots+f''(\xi_n)}{n} = f''(\xi).$$

болады. Сондықтан, ε оң саны беріліп, $\sup_{a\le\xi\le b}|f''(\xi)| = M$ болса, онда

$$|R| = \left|-f''(\xi_i)\frac{(b-a)^3}{12n^2}\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M < \varepsilon$$

теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір оң бүтін n саны үшін

$$\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+2f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+2f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)+f(b)\right\}$$

(қосындысы) квадратуралық формуласы $\int_a^b f(x)dx$ интегралын ε дәлдігімен жуықтайды.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.