5-дәріс

АРГУМЕНТІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ЖОҒАРҒЫ ШЕГІ БОЛАТЫН ФУНКЦИЯ

f функциясы $[a,b]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. Онда әрбір $a<x\le b$ үшін ол функция $[a,x]$ сегментінде де интегралданады. Сондықтан $[a,b]\ni x\mapsto \int_a^x f(t)dt$ сәйкестігі $[a,b]$ сегментінде анықталған функция болады. Бұл функцияны F әріпімен белгілейік:

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt \quad (a\le x\le b).$$

F функциясы *жоғарғы шегі айнымалы болатын интеграл* деп аталады.

Енді осы функцияның кейбір маңызды қасиеттерін келтірейік.

1-теорема. *f функциясы $[a,b]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. Онда $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз болады.*

2-теорема. f функциясы $[a,b]$ сегментінде Риман бойынша интегралдансын. Егер f функциясы $x_0\in[a,b]$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ функциясы сол нүктеде дифференциалданады да, $F'(x_0)=f(x_0)$ теңдігі орындалады.

3-теорема. *Егер f функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз болса, онда сол сегментте оның алғашқы функциясы бар болады.*

Ескерту. Әрине, төменгі шегі айнымалы болатын $G(x)=\int_x^b f(t)dt$ $(a\le x\le b)$ интегралын да қарастыруға болады.

Интегралдау және дифференциалдау ілімдерін байланыстыратын Ньютон-Лейбниц формуласы.

4-теорема. *Егер f функциясы $[a,b]$ сегментінде үзіліссіз болып, Ф функциясы оның сол сегменттегі алғашқы функцияларының бірі болса, онда*

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Бұл формула *Ньютон-Лейбниц формуласы* деп аталады.

Мысалдар.

1^0. $\int_{-1}^{1} x dx$ интегралын табу керек болсын. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, $\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x\right)$ болғандықтан, (5)-(6) бойынша $\Phi(x) = \frac{x^2}{2}$ үшін $\int_{-1}^{1} x dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

2^0. $\int_{-1}^{1} x^2 dx$ есептеу керек болсын. $\int_{-1}^{1} x^2 dx = x^3/3 + C, \left(x^3/3\right)' = x^2$, демек $\Phi(x) = \frac{x^3}{3}$ үшін $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

Бұл интералдық есептеудің негізгі теоремасының жалпы жағдайы болатын келесі теорема.

5-т е о р е м а *f функциясы $[a,b]$ сегментінде интегралданып, белгілі бір* Ф *функциясы үшін*

$$\Phi'(x) = f(x)\,(a \le x \le b)$$

болсын. Онда $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ *теңдігі орындалады.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.