EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 3

РИМАН ИНТЕГРАЛЫ. ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ҚОСЫНДЫЛАР. U–L ЖӘНЕ S ТІЛДЕРІНДЕГІ АНЫҚТАМАЛАР

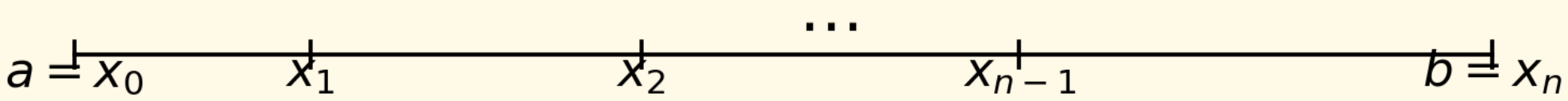
Дәріс құрылымы

1. Сегменттің бөлшектенуі және оның диаметрі
2. Жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылар
3. Риман интегралының U–L тіліндегі анықтамасы
4. Бөлшектенуді ұсақтау және монотондық қасиеттер
5. Интегралдану критерийі және жеткілікті шарттар
6. Интегралдың S тіліндегі анықтамасы

Сегменттің бөлшектенуі

[a, b] сегменті берілсін. Төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын нүктелердің ақырлы жиыны сегменттің P бөлшектенуі деп аталады.

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



Бөлшектену диаметрі

Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ сегментінің ұзындығын Δx_i арқылы белгілейміз. Ұзындықтардың ең үлкені P бөлшектенуінің диаметрі деп аталады.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\mu(P) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = b - a$$

Жоғарғы және төменгі шектер

f функциясы [a, b] сегментінде анықталған және шенелген болсын. Әрбір бөліктегі мәндердің супремумы мен инфимумын белгілейміз:

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

f шенелген болғандықтан, M_i және m_i нақты сандар болады.

Жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылар

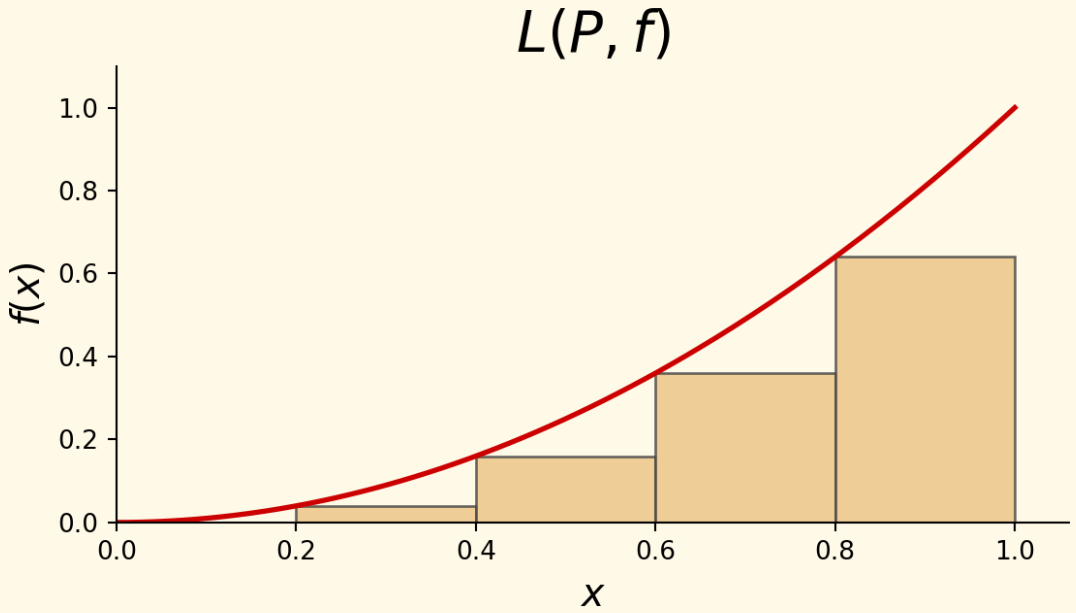
Жоғарғы интегралдық қосынды:

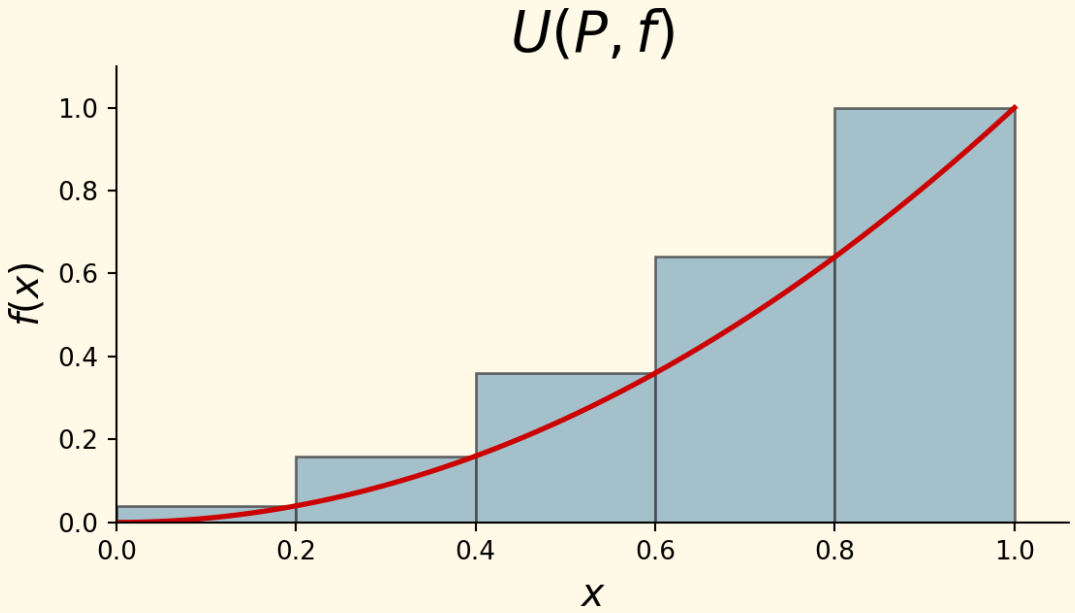
$$U(P, f) = M_1 \Delta x_1 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Төменгі интегралдық қосынды:

$$L(P, f) = m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Қосындылардың геометриялық мағынасы





Мысал: f(x) = x², [0, 1], бес тең бөлік. Төменгі және жоғарғы тік төртбұрыштар қосындыларды көрсетеді.

Жоғарғы және төменгі интегралдар

Барлық P бөлшектенулері бойынша жоғарғы қосындылардың инфимумы жоғарғы интеграл деп аталады.

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \inf_P U(P, f)$$

Төменгі қосындылардың супремумы төменгі интеграл деп аталады.

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \sup_P L(P, f)$$

Риман интегралының U–L тіліндегі анықтамасы

Егер f функциясының жоғарғы және төменгі интегралдары тең болса, онда f функциясы [a, b] сегментінде Риман бойынша интегралданады.

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Олардың ортақ мәні f функциясының анықталған интегралы деп аталады.

Анықталмаған интеграл мен анықталған интегралдың белгілеулерін ажыратамыз:

$$\int f(x)\,dx \qquad\qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

Ортақ бөлшектену және ұсақталу

P және P′ бөлшектенулерінің нүктелерін біріктіруден алынған P* бөлшектенуі олардың ортақ бөлшектенуі деп аталады.

$$P^* = P \cup P\prime, \qquad P \subseteq P^*, \quad P\prime \subseteq P^*$$

Ортақ бөлшектену әрбір бастапқы бөлшектенудің ұсақталуы болады.

$$P = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}, \quad P\prime = \{0, \tfrac{2}{3}, 1\}$$

$$P^* = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, 1\}$$

Ұсақталудағы монотондық қасиеттер

Лемма. Егер P* бөлшектенуі P бөлшектенуінің ұсақталуы болса, онда:

$$L(P, f) \leq L(P^*, f)$$

$$U(P^*, f) \leq U(P, f)$$

Бөлшектену ұсақталған сайын төменгі қосынды кемімейді, ал жоғарғы қосынды өспейді.

Монотондық қасиеттердің салдарлары

1-салдар. Кез келген P_1 және P_2 бөлшектенулері үшін:

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

2-салдар. Әрбір шенелген функцияның төменгі интегралы жоғарғы интегралынан аспайды:

$$\underline{\int} f(x)\,dx \leq \overline{\int} f(x)\,dx$$

Интегралданудың техникалық критерийі

Шенелген f функциясы [a, b] сегментінде Риман бойынша интегралдануы үшін әрбір ε > 0 санына сәйкес төмендегі шартты қанағаттандыратын Pε бөлшектенуінің бар болуы қажетті және жеткілікті:

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Интегралдануды қамтамасыз ететін қасиеттер

1-теорема. Егер f функциясы [a, b] сегментінде үзіліссіз болса, онда ол сол сегментте Риман бойынша интегралданады.

2-теорема. Егер f функциясы [a, b] сегментінде монотонды болса, онда ол сол сегментте Риман бойынша интегралданады.

Таңдалған нүктелер және Риман қосындысы

P бөлшектенуінің әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ бөлігінен кез келген t_i нүктесін таңдаймыз:

$$x_{i-1} \le t_i \le x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$S(P, t_1, \ldots, t_n; f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Бұл өрнек интегралдық қосынды немесе Риман қосындысы деп аталады.

Риман қосындысының шегі

Егер кез келген ε > 0 үшін δ > 0 табылып, μ(P) < δ болатын әрбір P бөлшектенуі мен нүктелердің кез келген таңдалуы үшін төмендегі теңсіздік орындалса, қосындылардың шегі A санына тең дейміз:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P, t_1, \ldots, t_n; f) = A$$

Интегралдың S тіліндегі анықтамасы

Егер Риман қосындыларының $\mu(P) \to 0$ болғанда

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = A$$

шегі бар және ол таңдалған нүктелерге тәуелсіз болса, онда f функциясы S тіліндегі анықтама бойынша интегралданады деп аталады. A саны f функциясының [a, b] сегментіндегі S тіліндегі интегралы деп аталады, яғни

$$(S)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = A$$

S және U–L анықтамаларының байланысы

3-теорема. Егер f функциясы [a, b] сегментінде S тіліндегі анықтама бойынша интегралданса, онда ол U–L тіліндегі анықтама бойынша да интегралданады және интегралдардың мәндері тең болады. Және де керісінше орындалады.

$$(S)\int_a^b f(x)\,dx = (U-L)\int_a^b f(x)\,dx$$

Негізгі әдебиеттер

- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
- ✓ Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
- ✓ Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
- ✓ Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.