Дәріс 2

КЕЙБІР РАЦИОНАЛ ЕМЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

Дәріс құрылымы

- ✓ Кейбір рационал емес функцияларды интегралдау.
- ✓ Эйлер ауыстыруы.
- ✓ Дифференциалдық бином.
- ✓ $\int R(sinx, cosx)\, dx$ түріндегі интеграл.

Негізі мақсат

$$\int R(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))dx \qquad (1)$$

түріндегі интегралды табу мәселесін қолайлы $x = \psi(t)$ ауыстыруы арқылы

$$R^*(t) = R(\varphi_0(\psi(t)), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))), \psi'(t) = \frac{P_m(t)}{Q_m(t)}$$

функциясы рационал бөлшек болатын $\int R^*(t)dt$ түріндегі интегралды есептеу мәселесіне келтіру болады.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx$$ ***($r_1, r_2, \ldots, r_s$- рационал сандар) түріндегі интегралдар***

Бұл интеграл

$$\phi_0(x) = x,\ \phi_i(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

болғандағы (1) интегралының дербес жағдайы.

Егер $ad = bc = \gamma \neq 0$ болса, онда

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{(\gamma/d)x + (\gamma/c)}{cx+d} = \frac{\gamma}{cd^3}$$

демек, қарастырылып тұрған интеграл астындағы функция $R\left(x, \left(\frac{\gamma}{cd^3}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{\gamma}{cd^3}\right)^{r_n}\right)$ рационал бөлшегі болады, ал бұл жағдай өткен параграфта толық зерттелген еді.

Сондықтан, болашақта $ad \neq bc$ деп ұйғарамыз. m саны $r_1, r_2, \dots, r_n$ сандарының ортақ бөлімі болсын, яғни кейбір p_i бүтін сандары үшін $r_i = \frac{p_i}{m}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ теңдіктері орындалсын. Осы жағдайға

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (2)$$

алмастыруын анықтайық. (2) айнымалысына кері функцияға көшкенде

$$x = \frac{t^m d-b}{-t^m c+a} = \psi(t),\ \varphi_0\big(\psi(t)\big) = \psi(t),$$

$$\varphi_i\big(\psi(t)\big) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

болғандықтан

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx = \int R*(t)dt\,,$$

$$R* = R\left(\frac{t^m d-b}{-t^m c+a}, t^{p_1}, \dots, t^{p_n}\right)\psi'(t).$$

Сонымен

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

түріндегі интеграл айнымалыны ауыстыру арқылы рационалданады.

Дербес жағдайлар:

$$\int R(x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_n}) dx \quad (c=0, d=1),$$

$$\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_n}) dx \quad (c=b=0, a=d=1).$$

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ түріндегі интегралдар

Бұл интеграл $R(x_0, x_1)$ екі айнымалылы рационал бөлшек,

$$x_0 = \phi_0(x),\ x_1 = \phi_1(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} \tag{3}$$

болғандағы (1) интегралының дербес жағдайы.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{4}$$

интегралын рационалдандыру үшін ***Эйлер ауыстырулары*** деп аталатын келесі үш ауыстырулардың біреуі қолданылады.

1. $a > 0$ болсын. Онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t \tag{5}$$

ауыстыруы үшін

$$(5) \Rightarrow ax^2+bx+c = ax^2+2xt\sqrt{a}+t^2 \Leftrightarrow bx+c = 2xt\sqrt{a}+t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} =: \psi(t).$$

Сонда

$$x = \varphi_0(x) = x = \psi(t),\ \varphi_1(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t = \frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}.$$

2. $c \geq 0$ болсын. Онда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \qquad (6)$$

ауыстыруы үшін

$$(6) \Rightarrow ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c, ax + b = xt^2 \pm 2t\sqrt{c}.$$

Бұдан

$$\varphi_0(x) = x = \frac{\pm 2t\sqrt{c} - b}{a - t^2} \equiv \psi(t),$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} = \frac{t^2\sqrt{c} - bt \pm a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

функциялары рационал бөлшек екенін көреміз, демек, (4) интегралы айнымалыны ауыстыруы арқылы рационалданады.

3. $b^2 - 4ac \geq 0$ болсын. Әрине, бұл жағдайда $ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері нақты мәнді болады, яғни қайсыбір x_1 және x_2 нақты сандары үшін $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Сондықтан,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \pm t(x - x_1) \qquad (7)$$

ауыстыруы үшін $(7) \Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2 \Rightarrow a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$ теңдіктері орындалады.

Бұдан

$$\varphi_0(x) = x = \frac{ax_2 - x_1t^2}{a - t^2} = \psi(t),$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_2 - x_1)t}{a - t^2}$$

функциялары рационал бөлшек екенін көреміз, демек, (6) интегралы айнымалыны ауыстыру арқылы рационалданады.

$x^m(a+bx^n)^p$ ***түріндегі дифференциалдық бином деп аталатын өрнек интегралы***

$x^m(a+bx^n)^p$ өрнегі (функциясы) дифференциалдық бином деп аталады. Мұнда $a \neq 0$ мен $b \neq 0$ - нақты, ал m, n және p-рационал сандар.

Алдымен дифференциалдық биномнан алынған интегралда $x = t^{1/n}$ ауыстыруы арқылы бұрын алынған нәтижелерді қолдануды мүмкін ететін түрге келтірейік:

$$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt,\ \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\left(\frac{m+1}{n}-1\right)} dt.$$

Сонымен,

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \qquad (8)$$

интегралы

$$\frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^q dt \left(q = \frac{m+1}{n} - 1\right) \qquad (9)$$

интегралына келтірілді.

1- ж а ғ д а й: p-бүтін сан болсын. r мен $s > 0$ бүтін сандар болатындай етіп q санын $q = \frac{m-n+1}{n} = \frac{r}{s}$ түрінде жазғанда, онда $R(t_0, t_1) = (a + bt_0)^p t_1^r$ рационал бөлшегі үшін $R\left(t, \left(\frac{1\cdot t+0}{0\cdot t+1}\right)^{1/s}\right) = R\left(t, t^{1/s}\right) = (a + bt)^p t^q$ болады, демек, ауыстыруы арқылы (9) интегралы, сонымен бірге (8) интегралы да рационалданады.

2-ж а ғ д а й. (9) интегралындағы q- бүтін сан болсын. Егер $p = \frac{r}{s}$ (r мен $s > 0$ -бүтін сандар) болса, онда $R(t_0, t_1) = t_0^q t_1^r$ рационал бөлшегі үшін $R\left(t, (a + bt)^{1/s}\right) = (a + bt)^p t^q$ болады, демек,

$$t = \frac{z^s - a}{b},\ dt = sz^{s-1}dz,\ \ z^s = a + bt,\ \ (a + bt)^p = z^{s\frac{r}{s}} = z^r \qquad (10)$$

ауыстыруы арқылы (9) интегралы $\int z^s \left(\frac{z^s-a}{b}\right)^q sz^{s-1}dz = \frac{s}{b^q}\int z^{z+s-1}(z^s - a)^q dz$ түрінде рационалданып (q - бүтін сан), сондықтан алғашқы (8) интегралы да рационалданады. Әрине, $x = \left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{1/n}$ алмастыруы бойынша соңғы интегралдағы z айнымалысынан x айнымалысына қайтып келеміз.

3- ж а ғ д а й: $p+q$- бүтін сан болсын. Анықтық үшін $p=r/s$ (r мен $s>0$–бүтін сандар) болады дейік. $(p+q)$ мен z бүтін сандар болғандықтан, $R(t_0,t_1)=t_0^{p+q}t_1^r$ рационал бөлшек болып,

$$R\left(t,\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}\right)^{\frac{r}{s}=p}=t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p=(a+bt)^{p/q}t^q$$

болады, демек, (9) интегралы рационалданатын интегралдарға жатып,

$$z^s=\frac{a+bt}{t}=\frac{a+bx^n}{x^n}$$

ауыстыруы арқылы рационалданады, сол себептен (8) интегралы да рационалданады.

П.Л. Чебышев* осы үш жағдайдан өзге жағдайлардың әрқайсысында (8) интегралы элементар функциялар арқылы бейнеленбейтінін дәлелдеді.

$\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)\, dx}$**түріндегі интеграл.** Бұл интеграл $n = 1,\ x_0 = \varphi_0(x) = sinx,\ x_1 = \varphi_1(x) = cosx$ болғандағы (1) интегралының дербес жағдайы болады. Осы $\int R(sinx, cosx)\, dx$ интегралы

$$t = tg(x/2)$$

ауыстыруы арқылы рационалданады. Расында да,

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctg\, t, \qquad dx = 2\,dt\,/(1+t^2)$$

демек,

$$\int R(sinx, cosx)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

* П.Л. Чебышев – әйгілі орыс математигі

Негізгі әдебиеттер

- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
- ✓ Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
- ✓ Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
- ✓ Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.