Дәріс 1

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ИНТЕГРАЛДАУ

Дәріс құрылымы

- ✓ Анықталмаған интеграл.
- ✓ Алғашқы функция.
- ✓ Интегралдаудың жалпы әдістері.
- ✓ Элементар функциялармен интегралданатын негізгі функциялар класы: рационал функциялар.
- ✓ Рационал функиялардың интегралдау.
- ✓ Рационал бөлшектерді жай бөлщектерге жіктеу.

f функциясы ақырлы немесе ақырсыз I аралығында, яғни сегментте, интервалда не жартылай интервалда анықталсын. Егер белгілі бір g функциясы үшін I аралығында теңдігі $g' = f$ орындалса, яғни әрбір $x \in I$ үшін $g'(x) = f(x)$ болса, онда g функциясын f *функциясының* I ***аралығындағы алғашқы функциясы*** деп атайды.

Алғашқы функция табу амалы ***интегралдау амалы*** немесе ***интегралдау****,* ал алғашқы функцияның өзі ***интеграл*** деп те аталады.

Егер g функциясы f функциясының алғашқы функциясы болса, онда әрбір C нақты саны үшін $g + C$ функциясы да алғашқы функция болады, өйткені

$$(g(x) + C)' = g'(x) + 0 = g'(x) = f(\mathrm{x})\ (x \in I).$$

А н ы қ т а м а. f функциясының I аралығындағы барлық алғашқы функцияларының жиыны f *функциясының* I *аралығындағы анықталмаған интегралы* деп аталады да,

$$\int f(x)dx\,, x \in I$$

символымен белгіленеді.

Егер де f функциясының I аралығында алғашқы функциясы бар болса, онда бұл жәйтті *«*f *функциясының* I *аралығында интегралданады»* деп те айтамыз.

Қандай функциялардың алғашқы функциялары бар болады? Бұл сұраққа келесі тамаша теорема жауап береді: егер $f(x)$ функциясы белгілі бір аралықта (анықталған және) үзіліссіз болса, онда оның сол аралықта алғашқы функциясы бар болады.

Кейбір элементар функциялардың алғашқы функциялары элементар функция болмайтынын дәлелдеуге болады. Сондай мысал ретінде келесі алғашқы функцияларды алуға болады:

1. $\int e^{-x^2} dx$,

2. $\int \cos(x^2) dx$,

3. $\int \sin(x^2) dx$,

4. $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$,

5. $\int \frac{\cos x}{x} dx$ $(x \neq 0)$,

6. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ $(x \neq 0)$.

Анықталмаған интегралдар кестесі:

1. $\int 0 \cdot dx = C$, $\int 1 \cdot dx = x + C$, $\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu + 1} x^{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$,
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$,
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$,
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$,
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ $(x \neq \pi n,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ $(-1 < x < 1)$,
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + C$ $(-1 < x < 1)$,
10. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$,
11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = -arcctgx + C$.
12. $\int shxdx = chx + C$,
13. $\int chxdx = shx + C$,
14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$,
15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = -cthx + C$

Теорема (интегралдың сызықтық қасиеті). $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары I аралығында интегралдансын. Онда кез келген α_1 және α_2 нақты сандары үшін

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_1 f_1(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx$$

теңдігі (жиындар теңдігі) орындалады.

Мысал.

$$\int (x + e^x)dx = \int xdx + \int e^x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 + e^x + C_2 = \frac{x^2}{2} + e^x + C,$$

Айнымалыны ауысытыру әдісі. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегементінде үзіліссіз болып, $\mathrm{g}(x)$ оның алғашқы функциясы болсын, яғни

$$\int f(x)dx = \mathrm{g}(x) + C \qquad (1)$$

$x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ сегментінде өзінің туындысымен бірге үзіліссіз болсын және әрбір $t \in [\alpha,\beta]$ үшін теңсіздіктері орындалсын. Онда $g(\varphi(t))$ күрделі функциясы $[\alpha,\beta]$ сегментінде дифференциалданып,

$$\frac{d}{dt}g\big(\varphi(t)\big) = g'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

теңдігі орындалады. Ал (1) бойынша $g'(x) = f(x)$ болғандықтан,

$$\frac{d}{dt}g\big(\varphi(t)\big) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

демек, анықталмаған интегралдың анықтамасы бойынша

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \mathrm{g}\big(\varphi(t)\big) + C \qquad (2)$$

(1) және (2) бойынша $x = \varphi(t)$ үшін

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt\,.$$

Бөліктеп интегралдау әдісі. Егер $u(x)$ және $\mathrm{v}(x)$ функцияларының I аралығында туындылары бар және үзіліссіз болса, онда

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

теңдігі (жиындар теңдігі) орындалады.

Рекуррентті формула. Бір түрдегі интегралдар тізбегі $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ берілсін. Егер белгілі бір k_0 нөмірі үшін, (k_0+1) нөмірінен басталатын әрбір $n = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$ нөмірлері J_n үшін интегралы дәл алдындағы $J_1, J_2, \ldots, J_{k_0}$ k интегралдары арқылы бейнеленсе (көбіне k_0=1 не $k_0 = 2$, ары дегенде k_0=3), яғни әр оң бүтін n үшін $J_n, J_{n-1}, \ldots, J_{n-k_0}$ интегралдарының арасында әрқашанда байланыс бар болса, сол байланысты ***рекуррентті формула*** деп атайды және әрқашанда $J_1, J_2, \ldots, J_{k_0}$ интегралдары белгілі болып не оңай табылса, онда бірте-бірте есептеп, кез келген J_n интегралын табуға болады.

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{a^2} J_{n-1}$$

Көпмүшеліктің канондық жіктелуі. Егер $Q(x)$ көпмүшелігінің коэффициенттері нақты сандар ғана болса, онда оның жіктелуі $Q(x)$ көпмүшелігінің нақты мәнді түбірлеріне сәйкес $(x-a)^r$ түріндегі көбейткіштер мен түйіндес комплекс түбірлеріне сәйкес $(x^2+px+q)^s$түріндегі көбейткіштерден тұрады, яғни

$$Q(x)=A(x-\alpha_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)^{r_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}.$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ *дұрыс рационал бөлшегі* берілсін. Келесі теорема алгебра курсынан белгілі: Егер

$$Q(x)=A(x-\alpha_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)^{r_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

тепе-теңдігі $Q(x)$ көпмүшелігінің канондық жіктелуі болса, онда қайсыбір

$$A_1,\ldots,A_{r_1},\ldots,B_1,\ldots,B_{r_n},\ldots,C_1,D_1,\ldots,C_{s_1},D_{s_1},\ldots,E_1,F_1,\ldots,E_{s_m},F_{s_m}$$

нақты сандары үшін

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{A_{r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{B_1}{(x-\alpha_n)}+\cdots+\frac{B_{r_n}}{(x-\alpha_n)^{r_n}}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\cdots+$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_mx+q_m}+\cdots+\frac{E_{s_m}x+F_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}.$$

Сонда рационал функцияларды интегралдауда төрт түрлі интеграл шығады:

$$\int \frac{Adx}{x-\alpha} = A\,ln|x-\alpha| + C,$$

$$\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^r} = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}} + C, (r = 2,3, \dots)$$

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx$$

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(D - B\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} == \frac{B}{2}ln(\,t^2+a^2) +$$

$$+\frac{2D-Bp}{2a}arctg\frac{t}{a} + C = \frac{B}{2}ln(\,x^2+px+q) + \frac{2D-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^s}dx \quad (s = 2,3, \dots)$$

Т е о р е м а. *Әрбір рационал бөлшектің алғашқы функциясы элементар функция болады.*

Негізгі әдебиеттер

- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
- ✓ Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
- ✓ Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
- ✓ Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
- ✓ Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.