4-дәріс

РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ СЫЗЫҚТЫҚ ҚАСИЕТІ, АДДИТИВТІЛІГІ. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛЫ, ТЕҢСІЗДІКТЕН ШЕККЕ КӨШУ

Риман интегралының сызықтық қасиеттері. Интегралдың сызықтық қасиеттері деп кез келген интегралданатын f_1 мен f_2 функцияларының *сызықтық комбинациясы*, яғни $c_1 f_1 + c_2 f_2$ функциясыда интегралданып,

$$c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]dx$$

теңдігі орындалатыны аталады

1 - т е о р е м а . *Егер f функциясы* $[a, b]$ *сегментінде интегралданса, онда әрбір c нақты саны үшін cf функциясы да сол сегментте интегралданады да*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

2 - т е о р е м а . *Егер f_1 мен f_2 функциялары* $[a, b]$ *сегментінде интегралданса, онда сол сегментте олардың қосындысы да интегралданып,*

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

теңдігін қанағаттандырады.

3 - т е о р е м а . *Егер $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функциялары* $[a, b]$ *сегментінде интегралданса, онда олардың қосындысы болатын $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ функциясы да сол сегментте интегралданып,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx,$$

яғни

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x)dx$$

*теңдігі орындалад*ы.

4 - т е о р е м а . *Егер* $[a, b]$ *сегментінде* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *функциялары интегралданса, онда кез келген* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *нақты сандары үшін* $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$ *функциясы да интегралданып,*

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)]dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x)dx$$

теңдігі орындалады.

Күрделі функция мен функциялар көбейтіндісінің Риман бойынша интегралдануы.

5-т е о р е м а . *f функциясы* $[a, b]$ *сегментінде интегралданып, әрбір* $x \in [a, b]$ *үшін* $m \le f(x) \le M$ *болсын. Егер* φ *функциясы* $[m, M]$ *сегментінде үзіліссіз болса, онда* $h(x) = \varphi(f(x))$ *күрделі функциясы* $[a, b]$ *сегментінде интегралданады.*

С а л д а р . *Егер* $f(x)$ *функциясы* $[a, b]$ *сегментінде интегралданса, онда әрбір* $\alpha > 0$ *үшін* $|f(x)|^\alpha$ *функциясы да сол сегментте интегралданады.*

Соның ішінде $\alpha = 1$ *болғанда* f *функциясы мен бірге оның модулі болып табылатын* $|f|$ *функциясы да интегралданады.*

6 - т е о р е м а . *Егер* f_1 *мен* f_2 *функциялары* $[a, b]$ *сегментінде интегралданса, онда олардың көбейтіндісі болатын* $f_1 \cdot f_2$ *функциясы да сол сегментте интегралданады.*

Риман интегралының аддитивтік қасиеті.

7 - т е о р е м а . *Егер f функциясы* $[a, b]$ *сегментінде интегралданса, онда* $a < c < b$ *теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір c саны үшін f функциясы* $[a, c]$ *және* $[c, b]$ *сегменттерінде интегралданып,* $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ *теңдігі орындалады.*

Салдар. *f функциясы* $[a, b]$ *сегментінде интегралданып,* $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ *нүктелері берілсін. Онда* $f(x)$ *функциясы әрбір* $[c_{i-1}, c_i] (i = 1, \dots, n)$ *сегментінде интегралданып,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=c_0}^{c_1} f(x)dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{b=c_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

8 - т е о р е м а . *f функциясы* $[a,b]$ *сегментінде анықталсын. Егер* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ *нүктелері* $[a,b]$ *сегментін әрбір* $[t_{i-1}, t_i]$ *сегментінде* $f(x)$

функциясы интегралданатындай жіктесе, онда $f(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде интегралданды да*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

9 - т е о р е м а . *Егер* f *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде шенелген болып, оның үзіліс нүктелер жиыны бос не ақырлы жиын болса, онда* f *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде Риман бойынша интегралданады.*

Риман интегралының сегменттегі интегралданатын функциялар теңсіздік қатынасын сақтауы.

1 0 - т е о р е м а . *Егер* f_1 *мен* f_2 *функциялары* $[a,b]$ *сегментінде интегралданып, әрбір* $x \in [a,b]$ *үшін* $f_1(x) \geq f_2(x)$ *болса, онда*

$$\int_a^b f_1(x)dx \geq \int_a^b f_2(x)dx .$$

1 - с а л д а р . *Егер* $f(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде интегралданып, әрбір* $x \in [a,b]$ *үшін* $f(x) \geq 0$ *болса, онда* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ *болады.*

2-салдар. *Егер* f *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде интегралданса, онда*

$$\left| \int_a^b f\ (x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

3-салдар. *Егер де* f *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде интегралданып, әрбір* $a \leq x \leq b$ *үшін* $|f(x)| \leq M$ *болса,*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$$

теңсіздігі орындалады.

4-салдар. *Егер де* f_1 *мен* f_2 *функциялары* $[a,b]$ *сегментінде интегралданып, әрбір* $x \in [a,b]$ *үшін*

$$m \leq f_1(x) \leq M$$

және

$$f_2(x) \geq 0$$

болса, онда

$$m\int_a^b f_2(x)dx \leq \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \leq M\int_a^b f_2(x)dx\,.$$

11-теорема. *Егер* f_1 *мен* f_2 *функциялары* $[a,b]$ *сегментінде интегралданып, әрбір* $x \in [a,b]$ *үшін сәйкес (40) және (41) теңсіздіктері орындалса, онда*

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = \mu\int_a^b f_2(x)dx$$

теңдігінқанағаттандыратын $m \leq \mu \leq M$ *саны табылады.*

Салдар. *Егер* f *функциясы* $[a,b]$*сегментінде интегралданып, барлық* $x \in [a,b]$*үшін* $m \leq f(x) \leq M$ *болса, онда* $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ *(45)теңдігі орындалатындай* $m \leq \mu \leq M$ *саны табылады.*

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.