3-ДӘРІС
РИМАН ИНТЕГРАЛЫ АНЫҚТАМАСЫ. ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ҚОСЫНДЫЛАР. ДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ U-L ЖӘНЕ S ТІЛДЕРІНДЕГІ АНЫҚТАМАЛАРЫ

$[a,\ b]$ сегменті берілсін. $a = x_0 \le x_1 \le ... \le x_n = b$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $x_0, x_1, ..., x_n$ сандарының ақырлы жиыны $[a,\ b]$ *сегментінің P-бөлшектенуі* деп аталады.

$[x_{i-1},\ x_i]$ сегментінің ұзындығы үшін $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ белгіленуі қолданылады. Ал сол сегменттердің ұзындықтарының ең үлкені *P-бөлшектенуінің диаметрі* деп аталады да $\mu(P)$ символымен белгілейміз. Сонымен, $\mu(P) = \max \Delta x_i$. Ілгеріде

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = \\ &= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + ... + (x_{n-1} - x_{n-1}) + x_n = x_n - x_0 = b - a\end{aligned} \tag{1}$$

теңдігі жиі пайдаланады.

Енді $[a,b]$ сегментінде шенелген нақты мәнді f функциясы берілсін. P-бөлшектенуі $[a,\ b]$ сегментінің бөлшектенулерінің бірі болсын. Әрбір $i = 1,\ 2,\ ...,n$ үшін f функциясы $[x_{i-1},\ x_i]$ сегментінде қабылдайтын мәндері жиынының супремумы мен инфимумы сәйкес M_i мен m_i болсын, яғни

$$M_i := \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\},\ \ m_i := \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}.$$

Әрине, әрбір i үшін M_i мен m_i нақты сандар болады, өйткені f *шенелген* функция. $\Delta x_1, M_i$ және m_i нақты сандарынан құрылған

$$U(P, f) := M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + ... + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{2}$$

және

$$L(P, f) := m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + ... + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{3}$$

қосындылары сәйкес *жоғарғы* және *төменгі интегралдық қосындылары* деп аталады.

Жазуларды ықшамдау мақсатымен (2)-(3) қосындыларының мәндерін өзгертпейтін P-бөлшектерін ыңғайына қарай $P : a = x_0 \le ... \le x_{i-1} \le x_i \le ... \le x_n = b$ және $a = x_0 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ анықтамаларымен қолдана береміз.

f функциясы $[a,b]$ сегментінде анықталған және шенелген болсын. Оның барлық жоғарғы (төменгі) интегралдық қосындылары – $U(P,f)(L(P,f))$ сандарынан құрылған жиынның инфимумын (супремумын) f функциясының $[a,b]$ сегментіндегі *жоғарғы (төменгі) интегралы* деп атайды да $\bar{\int} f(x)dx$ $\left(\underline{\int} f(x)dx\right)$ символымен белгілейді. Сонымен,

$$\bar{\int} f(x)\,dx = \inf_P U(P,f), \underline{\int} f(x)\,dx = \sup_P L(P,f). \qquad (4)$$

Егер f функциясының жоғарғы және төменгі интегралдары беттессе, яғни $\bar{\int} f(x)dx = \underline{\int} f(x)dx$ теңдігі орындалса, онда f функциясы $[a,b]$ *сегментінде Риман бойынша интегралданады* дейді де, жоғарғы және төменгі интегралдардың ортақ мәнін $f(x)$ *функциясының* $[a,b]$ *сегментіндегі интегралы* деп атап,

$$\bar{\int} f(x)dx = \underline{\int} f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

символымен белгілейді. Кейде Риман интегралын *анықталған интеграл* деп те атайды.

Сонымен, анықталмаған интегралдың $\int f(x)dx$ және анықталған интегралдың $\int_a^b f(x)dx$ белгілеулері ұқсас болады.

Жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылардың, жоғарғы және төменгі интегралдардың монотондық сипаттағы қасиеттері.

P мен P' бөлшектенулерінің кемінде біреуінде жататын нүктелерден құрылған P^*-бөлшектенуі (яғни $P^* = P \cup P'$) аталған бөлшектенулердің *ортақ бөлшектенуі* деп аталады. Мәселен, жоғарыда келтірілген P және P_1-бөлшектенулерінің ортақ бөлшектенуі $P \cup P_1 = \{0, 1/2, 2/3, 1\}$ жиыны. Екі бөлшектенудің ортақ бөлшектенуі олардың әрқайсысының ұсақталуы болады (өйткені $P \subset P \cup P'$ және $P' \subset P \cup P'$).

Л е м м а. *Егер* P^**-бөлшектенуі* P*-бөлшектенуінің ұсақталуы болса, онда*

$$L(P,f) \le L(P^*,f)$$

$$U(P^*,f) \le U(P,f)$$

теңсіздіктері орындалады.

Басқа сөзбен айтқанда, бөлшектену ұсатылған сайын жоғарғы қосындылар кеми, ал төменгі қосындылар үлкейе түседі.

1 - с а л д а р. f *функциясының кез келген жоғарғы қосындысы кез келген төменгі интегралдық қосындысынан кем емес, яғни кез келген* P_1 *және* P_2 *бөлшектенулері үшін*

$$L(P_1, f) \le U(P_2, f).$$

2- с а л д а р. Әрбір шенелген функцияның жоғарғы интегралы төменгі интегралынан кем емес:

$$\underline{\int} f(x)dx \le \overline{\int} f(x)dx.$$

Функцияның Риман бойынша интегралдануының техникалық критерийі.

Шенелген f *функциясы* $[a, b]$ *сегментінде Риман бойынша интегралдануы үшін әрбір* ε *оң саны бойынша*

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

теңсіздігін қанағаттандыратын P_ε *бөлшектенуі бар болуы қажетті және жеткілікті.*

Риман бойынша интегралдануды қамтамасыз ететін функция қасиеттері. Осы жерге дейін функция интегралдануының анықтамасы мен сол анықтаманың басқаша оқылуы (яғни критерийді) берілген еді. Бірақ, функцияның қандай қасиеттері сол анықтаманың орындалуын қамтамасыз ететінін әлі зерттеген жоқпыз. Осы пунктте функция интегралдануының критерийі қолданылып, сондай қасиеттерге үзіліссіздік пен монотондылық жататыны дәлелденеді.

1- т е о р е м а. *Егер* f *функциясы* $[a, b]$ *сегментінде үзіліссіз болса, онда* f *сол сегментте Риман бойынша интегралданады.*

2 - т е о р е м а. *Егер* f *функциясы* $[a, b]$ *сегментінде монотонды болса, онда* f *сол сегментте Риман бойынша интегралданады.*

Анықтама. f функциясы $[a,b]$ сегментінде анықталсын. Егер белгілі бір A нақты саны мен кез келген ε оң саны бойынша $\mu(P) = \max\limits_{i=1,\dots n} \Delta x_i < \delta$ мен әрбір $P = \{a = x_0 < x_1, ..., < x_n = b)$ бөлшектенуі мен $x_{i-1} \le t_i \le x_i (i = 1, \dots, n)$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын кез келген $t_1, t_2, ..., t_n$ сандары үшін

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A \right| = \left| S(P, t_1, ..., t_n, f) - A \right| < \varepsilon \qquad (3)$$

теңсіздігі орындалатын δ оң саны табылса, онда $\mu(P)\to 0$ болғанда $S(P,\{t_i\},f)\equiv S(P,t_1,...,t_n,f)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ *қосындыларының шегі бар* және *ол* A *санына тең* дейді де, оны

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i\to 0\\ i=1,...n}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{\mu(P)\to 0} S(P,\{t_i\},f) = A \qquad (4)$$

символдарымен белгілейді.

Егер f функциясы үшін (4) теңдігі орындалса, онда f функциясы $[a,b]$ *сегментінде интегралдың* S*-тіліндегі анықтамасы бойынша интегралданады* дейді де, A санын f *функциясының* S*-тіліндегі интегралы* деп атап,

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)dx$$

символымен белгілейді.

3-теорема. f *функциясы* $[a,b]$ *сегментінде анықталсын. Егер* f *функциясы интегралдың* S*-тіліндегі анықтамасы бойынша интегралданса, онда ол сол сегментте шенелген болып, интегралдың* $(U-L)$*-тіліндегі анықтамасы бойынша да интегралданып,*

$$(S)\int_a^b f(x)dx = (U-L)\int_a^b f(x)dx$$

теңдігі орындалады.

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.