2-дәріс

КЕЙБІР РАЦИОНАЛ ЕМЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

Негізі мақсат

$$\int R(\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))dx \tag{1}$$

түріндегі интегралды табу мәселесін қолайлы $x = \psi(t)$ ауыстыруы арқылы $R^*(t) = R(\varphi_0(\psi(t)), \varphi_1(\psi(t)), ..., \varphi_n(\psi(t)))$, $\psi'(t) = \frac{P_m(t)}{Q_m(t)}$ функциясы рационал бөлшек болатын $\int R^*(t)dt$ түріндегі интегралды есептеу мәселесіне келтіру болады

$\int \boldsymbol{R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right)dx}$ ***($r_1, r_2, \ldots, r_s$- рационал сандар) түріндегі интегралдар.***

Бұл интеграл

$$\phi_0(x) = x,\ \phi_i(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}\ (i = 1, 2, ..., n)$$

болғандағы (1) интегралының дербес жағдайы.

Егер $ad = bc = \gamma \neq 0$ болса, онда

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{(\gamma/d)x + (\gamma/c)}{cx+d} = \frac{\gamma}{cd^3}$$

демек, қарастырылып тұрған интеграл астындағы функция $R\left(x, \left(\frac{\gamma}{cd^3}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{\gamma}{cd^3}\right)^{r_n}\right)$ рационал бөлшегі болады, ал бұл жағдай өткен параграфта толық зерттелген еді.

Сондықтан, болашақта $ad \neq bc$ деп ұйғарамыз. m саны $r_1, r_2, ..., r_n$ сандарының ортақ бөлімі болсын, яғни кейбір p_i бүтін сандары үшін $r_i = \frac{p_i}{m}(i = 1, 2, ..., n)$ теңдіктері орындалсын. Осы жағдайға

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{2}$$

алмастыруын анықтайық. (2) айнымалысына кері функцияға көшкенде

$$x = \frac{t^m d - b}{-t^m c + a} = \psi(t),\ \varphi_0(\psi(t)) = \psi(t),$$

$$\varphi_i(\psi(t)) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}\ (i = 1, 2, ..., n)$$

болғандықтан

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx=\int R*(t)dt,$$

$$R*=R\left(\frac{t^m d-b}{-t^m c+a},t^{p_1},\ldots,t^{p_n}\right)\psi'(t).$$

Сонымен

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$$

түріндегі интеграл айнымалыны ауыстыру арқылы рационалданады.

Дербес жағдайлар:

$$\int R\left(x,(ax+b)^{r_1},\ldots,(ax+b)^{r_n}\right)dx \quad (c=0,\ d=1),$$
$$\int R\left(x,x^{r_1},\ldots,x^{r_n}\right)dx \quad (c=b=0,\ a=d=1).$$

$\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$ *түріндегі интегралдар.*

Бұл интеграл $R(x_0,x_1)$ екі айнымалылы рационал бөлшек,

$$x_0=\phi_0(x)=x,\ x_1=\phi_1(x)=\sqrt{ax^2+bx+c} \tag{3}$$

болғандағы (1) интегралының дербес жағдайы.

$$\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx} \tag{4}$$

интегралын рационалдандыру үшін *Эйлер ауыстырулары* деп аталатын келесі үш ауыстырулардың біреуі қолданылады.

1. $a>0$ болсын. Онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=t \tag{5}$$

ауыстыруы үшін

$(5)\Rightarrow ax^2+bx+c=ax^2+2xt\sqrt{a}+t^2\Leftrightarrow bx+c=2xt\sqrt{a}+t^2\Rightarrow$

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}=:\psi(t).$$

Сонда

$$x=\varphi_0(x)=x=\psi(t),\ \varphi_1(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t=\frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}.$$

2. $c\geq 0$ болсын. Онда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c} \tag{6}$$

ауыстыруы үшін $(6)\Rightarrow ax^2+bx+c=x^2t^2\pm 2xt\sqrt{c}+c, ax+b=xt^2\pm 2t\sqrt{c}.$ Бұдан

$$\phi_0(x)=x=\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\equiv\psi(t),$$
$$\phi_1(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}=\frac{t^2\sqrt{c}-bt\pm a\sqrt{c}}{a-t^2}$$

функциялары рационал бөлшек екенін көреміз, демек, (4) интегралы айнымалыны ауыстыруы арқылы рационалданады.

3. $b^2-4ac\geq 0$ болсын. Әрине, бұл жағдайда $ax^2+bx+c=0$ теңдеуінің түбірлері нақты мәнді болады, яғни қайсыбір x_1 және x_2 нақты сандары үшін $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$ Сондықтан,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\pm t(x-x_1) \tag{7}$$

ауыстыруы үшін $(7)\Rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2\Rightarrow a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$ теңдіктері орындалады. Бұдан

$$\varphi_0(x)=x=\frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}=\psi(t),\ \ \varphi_1(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}$$

функциялары рационал бөлшек екенін көреміз, демек, (6) интегралы айнымалыны ауыстыру арқылы рационалданады.

$x^m(a+bx^n)^p$ ***түріндегі дифференциалдық бином деп аталатын өрнек интегралы.***

$x^m\left(a+bx^n\right)^p$ өрнегі (функциясы) *дифференциалдық бином* деп аталады. Мұнда $a\neq 0$ мен $b\neq 0$ - нақты, ал m,n және p -рационал сандар.

Алдымен дифференциалдық биномнан алынған интегралда $x=t^{1/n}$ ауыстыруы арқылы бұрын алынған нәтижелерді қолдануды мүмкін ететін түрге келтірейік:

$$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt,\ \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int\left(a+bt\right)^p t^{\left(\frac{m+1}{n}-1\right)}dt.$$

Сонымен,

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \tag{8}$$

интегралы

$$\frac{1}{n}\int(a+bt)^p t^q dt\left(q=\frac{m+1}{n}-1\right) \tag{9}$$

интегралына келтірілді.

I ж а ғ д а й: p-бүтін сан болсын. r мен $s>0$ бүтін сандар болатындай етіп q санын $q=\frac{m-n+1}{n}=\frac{r}{s}$ түрінде жазғанда, онда $R(t_0,t_1)=(a+bt_0)^p t_1^r$ рационал бөлшегі үшін $R\left(t,\left(\frac{1\cdot t+0}{0\cdot t+1}\right)^{1/s}\right)=R\left(t,t^{1/s}\right)=(a+bt)^p t^q$ болады, демек, $z^s=\frac{1\cdot t+1}{0\cdot t+1}=t=x^n$ ауыстыруы арқылы (9) интегралы, сонымен бірге (8) интегралы да рационалданады.

II ж а ғ д а й. (9) интегралындағы q - бүтін сан болсын. Егер $p=\frac{r}{s}$ (r мен $s>0$-бүтін сандар) болса, онда $R(t_0,t_1)=t_0^q\ t_1^r$ рационал бөлшегі үшін $R\left(t,(a+bt)^{1/s}\right)=t^q(a+bt)^p$ болады, демек,

$$t=\frac{z^s-a}{b},dt=sz^{s-1}dz,\ z^s=a+bt,\ (a+bt)^p=z^{s\frac{r}{s}}=z^r \tag{10}$$

ауыстыруы арқылы (9) интегралы $\int z^s\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^q sz^{s-1}dz=\frac{s}{b^q}\int z^{z+s-1}\left(z^s-a\right)^q dz$ түрінде рационалданып (q- бүтін сан), сондықтан алғашқы (8) интегралы да рационалданады. Әрине, $x=\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{1/n}$ алмастыруы бойынша соңғы интегралдағы z айнымалысынан x айнымалысына қайтып келеміз.

III ж а ғ д а й: $p+q$ - бүтін сан болсын. Анықтық үшін $p=r/s$ (r мен $s>0$– бүтін сандар) болады дейік. $(p+q)$ мен z бүтін сандар болғандықтан, $R(t_0,t_1)=t_0^{p+q}\ t_1^r$ рационал бөлшек болып,

$$R\left(t,\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}\right)^{\frac{z}{s}=p}=t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{p}=(a+bt)^{p/q}t^{q}$$

болады, демек, (9) интегралы рационалданатын интегралдарға жатып, $z^s=\dfrac{a+bt}{t}=\dfrac{a+bx^n}{x^n}$ ауыстыруы арқылы рационалданады, сол себептен (8) интегралы да рационалданады.

П.Л. Чебышев* осы үш жағдайдан өзге жағдайлардың әрқайсысында (8) интегралы элементар функциялар арқылы бейнеленбейтінін дәлелдеді.

$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ ***түріндегі интеграл.***

Бұл интеграл $n=1, x_0=\varphi_0(x)=\sin x,\ x_1=\varphi_1(x)=\cos x$ болғандағы (1) интегралының дербес жағдайы болады. Осы

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

интегралы

$$t=tg\,(x/2)$$

ауыстыруы арқылы рационалданады. Расында да,

$$\sin x=\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}=\frac{2tg\,(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}=\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2arctg\,t,\qquad dx=2\,dt\,/(1+t^2)$$

демек,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Негізгі әдебиеттер

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: оқу құралы. 2-бөлім. - Алматы : Ана тілі, 1991. - 400 б.
3. Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). Т. I. Т. II. -Астана, электронды басылым. 2023, 2000 бет.

* П.Л. Чебышев – әйгілі орыс математигі

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. -24-е изд., стер. -Санкт-Петербург: Лань, 2022. -624 с.
5. Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Дулатова А.К. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебно-методическое руководство для студентов образовательных программ направлений Математика, Компьютерные и Естественные науки. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2024. –133 с.