EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

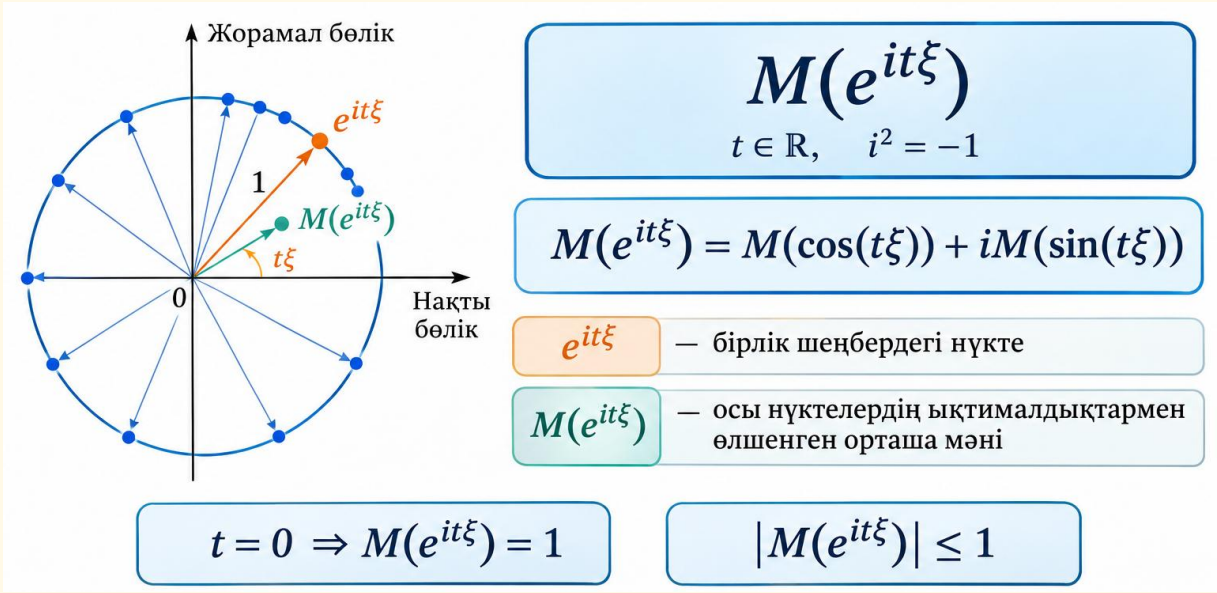
Дәріс 15

ХАРАКТЕРИСТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯ. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАРЫ

Дәріс құрылымы

- Шартты ықтималдық
- Шартты үлестірім функциясы
- Шартты үлестірім тығыздығы
- Регрессия функциясы
- Шартты дисперсия, шартты орташа квадраттық ауытқу

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдықтар кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $e^{it\xi}$ $(i^2 = -1)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі ξ *кездейсоқ шамасының характеристикалық функциясы* деп аталады.



Теорема 1. *Характеристикалық функция келесі қасиеттерге ие*

1⁰. $f_\xi(t)$ *характеристикалық функциясы анықталу жиынында теріс емес және абсолют шамасы бойынша бірден аспайды, яғни* $|f_\xi(t)| \leq 1$ *және* $f_\xi(0) = 1$.

2⁰. $\eta = a\xi + b$ *теңдігі арқылы анықталған* ξ, η *кездейсоқ шамалары үшін* $f_\eta(t) = f_\xi(at)e^{ibt}$ *теңдігі орындалады.*

3⁰. *Егер* ξ_1 *және* ξ_2 *тәуелсіз кездейсоқ шамалары үшін* η *кездейсоқ шамасы* $\eta = \xi_1 + \xi_2$ *теңдігімен анықталса, онда оның характеристикалық функциясы үшін* $f_\eta(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t)$ *теңдігі орындалады.*

4⁰. *Егер* ξ *кездейсоқ шамасының* n *ретті* m_n *моменті бар болса, онда* ξ *кездейсоқ шамасының* $f_\xi(t)$ *характеристикалық функциясы* n *рет дифференциалданып, әрбір* $k \leq n$ *үшін*

$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k m_k$$

теңдігі орындалады.

Теорема 2 (Үзіліссіздік теоремасы). $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ *үлестіру функцияларынан тұратын тізбек* $F(x)$ *үлестіру функциясына жеңіл түрде жинақталу үшін* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *характеристикалық функциялар тізбегінің* $f(x)$ *характеристикалық функциясына әрбір нүктеде жинақталуы қажетті және жеткілікті.*

Анықтама 2. Бірдей элементар оқиғалар кеңістігінде анықталған $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалары беріліп,

$$A = \left\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to+\infty} \xi_n(\omega) = 0\right\}$$

жиынын (оқиғасын) анықтайық. Егер $P(A) = 1$ теңдігі орындалса, онда тізбек 1 *ықтималдығымен* 0 *кездейсоқ шамасына жинақталады* деп аталады.

Анықтама 3. Егер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі мен әрбір $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega: |\xi_n(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

теңдігі орындалса, онда бұл тізбек *ықтималдық бойынша* 0 *кездейсоқ шамасына ұмтылады* дейді. Тізбектің 0 санына ықтималдық бойынша жинақталуы $\xi_n \xrightarrow{P} 0 (n \to +\infty)$ түрінде белгіленеді.

Анықтама 4. Егер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n^2 = 0$$

теңдігі орындалса, онда бұл тізбек *орташа квадраттық мағынада* 0 *санына жинақталады* деп аталады. 0 санына орташа квадраттық түрде жинақталу $\xi_n \xrightarrow{o.k} 0 (n \to +\infty)$ түрінде белгіленеді.

Анықтама 5. Егер $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ үлестіру функциялар тізбегі үшін әрбір *F*(*x*) функциясының барлық *x* үзіліссіздік нүктелерінде

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

теңдігі орындалса, онда бұл үлестіру функциялар тізбегі $F(x)$ *функциясына жеңіл түрде жинақталады* деп аталады.

Теорема 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдықтар кеңістігінде анықталған* ξ *кездейсоқ шамасы берілсін.* $M\xi$ *математикалық күтім мәніне тең болатын* ξ *теріс емес кездейсоқ шамасы үшін әрбір* ε *оң саны бойынша*

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}$$

орындалып, бұл Чебышевтың бірінші теңсіздігі деп аталады.

Теорема 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдықтар кеңістігінде анықталған* ξ *кездейсоқ шамасы берілсін. Математикалық күтімі* $M\xi$*, ал дисперсиясы* $D\xi$ *санына тең болатын* ξ *кездейсоқ шамасы үшін әрбір* ε *оң саны бойынша Чебышевтың екінші теңсіздігі деп аталатын*

$$P(\{\omega \in \Omega: |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

теңсіздігі орындалады.

Анықтама 6. Математикалық күтімдері ақырлы болатын $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі берілсін. Егер әрбір ε оң саны бойынша

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

теңдігі орындалса, онда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *кездейсоқ шамалар тізбегі үшін үлкен сандар заңы орындалады* деп аталады.

Анықтама 7. Егер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \xrightarrow{P} 0 (n \to +\infty)$$

орындалса, онда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін *күшейтілген үлкен сандар заңы орындалады* деп аталады.

Теорема 5. *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалары үшін математикалық күтімдері* 0 *санына тең болып, дисперсиялары ақырлы және $\sum_{k=1}^{n} \frac{D\xi_k}{k^2}$ болсын. Онда бұл тізбек үшін күшейтілген үлкен сандар заңы орындалады.*

Теорема 6. *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ тәуелсіз, бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі болсын. Тізбек үшін күшейтілген үлкен сандар заңы орындалу үшін кездейсоқ шамалардың математикалық күтімдері ақырлы болулары қажетті және жеткілікті.*

Теорема 7 (Бернулли теоремасы – үлкен сандар заңы). *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ... Бернулли схемасын қанағаттандыратын кездейсоқ шамалар тізбегі үшін $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ болсын. Онда $\frac{S_n}{n}$ тізбегі p ықтималдығына ықтималдық бойынша ұмтылады.*

Негізгі әдебиеттер

1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

Назарларыңызға рахмет