15-дәріс

ХАРАКТЕРИСТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯ. ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАРЫ

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдықтар кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $e^{it\xi}(i^2 = -1)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі ξ *кездейсоқ шамасының характеристикалық функциясы* деп аталады.

Теорема 1. *Характеристикалық функция келесі қасиеттерге ие*

1^0. $f_\xi(t)$ *характеристикалық функциясы анықталу жиынында теріс емес және абсолют шамасы бойынша бірден аспайды, яғни* $|f_\xi(t)| \le 1$ *және* $f_\xi(0) = 1$.

2^0. $\eta = a\xi + b$ *теңдігі арқылы анықталған* ξ, η *кездейсоқ шамалары үшін* $f_\eta(t) = f_\xi(at)e^{ibt}$ *теңдігі орындалады.*

3^0. *Егер* ξ_1 *және* ξ_2 *тәуелсіз кездейсоқ шамалары үшін* η *кездейсоқ шамасы* $\eta = \xi_1 + \xi_2$ *теңдігімен анықталса, онда оның характеристикалық функциясы үшін* $f_\eta(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t)$ *теңдігі орындалады.*

4^0. *Егер* ξ *кездейсоқ шамасының* n *ретті* m_n *моменті бар болса, онда* ξ *кездейсоқ шамасының* $f_\xi(t)$ *характеристикалық функциясы* n *рет дифференциалданып, әрбір* $k \le n$ *үшін*

$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k m_k$$

теңдігі орындалады.

Теорема 2 (Үзіліссіздік теоремасы). $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$ *үлестіру функцияларынан тұратын тізбек* $F(x)$ *үлестіру функциясына жеңіл түрде жинақталу үшін* $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ *характеристикалық функциялар тізбегінің* $f(x)$ *характеристикалық функциясына әрбір нүктеде жинақталуы қажетті және жеткілікті.*

Анықтама 2. Бірдей элементар оқиғалар кеңістігінде анықталған $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ кездейсоқ шамалары беріліп,

$$A = \left\{\omega \in \Omega: \lim_{n \to +\infty} \xi_n(\omega) = 0\right\}$$

жиынын (оқиғасын) анықтайық. Егер $P(A) = 1$ теңдігі орындалса, онда тізбек 1 *ықтималдығымен* 0 *кездейсоқ шамасына жинақталады* деп аталады.

Анықтама 3. Егер $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ кездейсоқ шамалар тізбегі мен әрбір $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\lim_{n \to \infty} P(\{\omega \in \Omega: |\xi_n(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

теңдігі орындалса, онда бұл тізбек *ықтималдық бойынша* 0 *кездейсоқ шамасына ұмтылады* дейді. Тізбектің 0 санына ықтималдық бойынша жинақталуы $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ $(n \to +\infty)$ түрінде белгіленеді.

Анықтама 4. Егер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін

$$\lim_{n\to\infty} M\xi_n^2 = 0$$

теңдігі орындалса, онда бұл тізбек *орташа квадраттық мағынада* 0 *санына жинақталады* деп аталады. 0 санына орташа квадраттық түрде жинақталу $\xi_n \xrightarrow{o.k} 0$ $(n \to +\infty)$ түрінде белгіленеді.

Анықтама 5. Егер $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ үлестіру функциялар тізбегі үшін әрбір $F(x)$ функциясының барлық x үзіліссіздік нүктелерінде

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

теңдігі орындалса, онда бұл үлестіру функциялар тізбегі $F(x)$ *функциясына жеңіл түрде жинақталады* деп аталады.

Теорема 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдықтар кеңістігінде анықталған* ξ *кездейсоқ шамасы берілсін.* $M\xi$ *математикалық күтім мәніне тең болатын* ξ *теріс емес кездейсоқ шамасы үшін әрбір* ε *оң саны бойынша*

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}$$

орындалып, бұл Чебышевтың бірінші теңсіздігі деп аталады.

Теорема 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдықтар кеңістігінде анықталған* ξ *кездейсоқ шамасы берілсін. Математикалық күтімі* $M\xi$*, ал дисперсиясы* $D\xi$ *санына тең болатын* ξ *кездейсоқ шамасы үшін әрбір* ε *оң саны бойынша Чебышевтың екінші теңсіздігі деп аталатын*

$$P(\{\omega \in \Omega: |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

теңсіздігі орындалады.

Анықтама 6. Математикалық күтімдері ақырлы болатын $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі берілсін. Егер әрбір ε оң саны бойынша

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

теңдігі орындалса, онда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *кездейсоқ шамалар тізбегі үшін үлкен сандар заңы орындалады* деп аталады.

Анықтама 7. Егер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \xrightarrow{P} 0 \ (n \to +\infty)$$

орындалса, онда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалар тізбегі үшін *күшейтілген үлкен сандар заңы орындалады* деп аталады.

Теорема 5. *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ кездейсоқ шамалары үшін математикалық күтімдері* 0 *санына тең болып, дисперсиялары ақырлы және* $\sum_{k=1}^{n} \frac{D\xi_k}{k^2}$ *болсын. Онда бұл тізбек үшін күшейтілген үлкен сандар заңы орындалады.*

Теорема 6. *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$,... тәуелсіз, бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі болсын. Тізбек үшін күшейтілген үлкен сандар заңы орындалу үшін кездейсоқ шамалардың математикалық күтімдері ақырлы болулары қажетті және жеткілікті.*

Теорема 7 (Бернулли теоремасы – үлкен сандар заңы). *$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$... Бернулли схемасын қанағаттандыратын кездейсоқ шамалар тізбегі үшін $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ болсын. Онда $\frac{S_n}{n}$ тізбегі p ықтималдығына ықтималдық бойынша ұмтылады.*