EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 14

ШАРТТЫ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАР

Дәріс құрылымы

- Шартты ықтималдық
- Шартты үлестірім функциясы
- Шартты үлестірім тығыздығы
- Регрессия функциясы
- Шартты дисперсия, шартты орташа квадраттық ауытқу

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторы берілсін. ξ және η кездейсоқ шамаларының қабылдайтын мәндері сәйкесінше x_j $(j = 1, \ldots, n)$ және y_k $(k = 1, \ldots, m)$ болсын. $\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = y_k\}$ оқиғасы (шарт ретінде) орындалғанда $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j\}$ оқиғасының шартты ықтималдығы, яғни

$$p_{x_j|y_k} = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j | \eta(\omega) = y_k\}) =$$

$$= \frac{P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j, \eta(\omega) = y_k\})}{P(\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = y_k\})} = \frac{p_{jk}}{p_{y_k}^{(\eta)}} \ (j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$$

η кездейсоқ шамасы y_k мәнін қабылдағанда ξ кездейсоқ шамасының x_j мәнін қабылдау ықтималдылығы (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторының $p_{x_j|y_k} (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$ *шартты ықтималдылығы* деп аталады, мұндағы $p_{jk} = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j, \eta(\omega) = y_k\})$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$ ықтималдықтары (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторының бірлескен үлестірім қатары, ал $p_{y_k}^{(\eta)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ - η кездейсоқ шамасының маргиналды үлестірімі.

Анықтама 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторы η кездейсоқ шамасы $y_k\ (k = 1, \ldots, m)$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының $p_{x_j|y_k}\ (j = 1, \ldots, n)$ шартты үлестірімімен берілсін. η *кездейсоқ шамасы* $y_k\ (k = 1, \ldots, m)$ *мәнін қабылдағандағы* ξ *кездейсоқ шамасының шартты үлестірім функциясы* деп

$$F_\xi(x|\eta = y_k) = \frac{P(\{\omega \in \Omega\colon\ \xi(\omega) < x, \eta(\omega) = y_k\})}{P(\{\omega \in \Omega\colon\ \eta(\omega) = y_k\})} = \sum_{i:x_i<x} p_{x_i|y_k}$$

функциясын айтамыз.

Анықтама 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы үзіліссіз ортақ үлестірім $p(x, y)$ тығыздығымен беріліп,

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy\,,\ p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

маргиналды тығыздықтары болып, $\bar{y}$ нақты саны $p_\eta(\bar{y}) > 0$ болатындай бекітіліп алынсын.

$$p_\xi(x|\bar{y}) = \frac{p(x, \bar{y})}{p_\eta(\bar{y})}\ (-\infty < x < +\infty)$$

функциясы η кездейсоқ шамасы $\bar{y}$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының *шартты үлестірім тығыздығы* деп аталады.



Теорема 1. Әрбір $\bar{y}$ нақты саны үшін $p_\xi(x|\bar{y})$ шартты үлестірім тығыздығы x айнымалысы бойынша тығыздық функциясы болады.

Анықтама 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы үзіліссіз ортақ $p(x, y)$ үлестірім тығыздығымен беріліп,

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy\,, p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

маргиналды тығыздықтары болып, $\bar{y}$ нақты саны $p_\eta(\bar{y}) > 0$ болатындай бекітіліп алынсын.

$$F_\xi(x|\bar{y}) = \frac{1}{p_\eta(\bar{y})} \int_{-\infty}^{x} p(u, \bar{y})\, du\ (-\infty < x < +\infty)$$

η кездейсоқ шамасы $\bar{y}$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының *шартты үлестірім функциясы* деп аталады.

Анықтама 5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін. η кездейсоқ шамасына тәуелді

$$g(\eta) = M(\xi|\eta)$$

функциясын ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты шартты математикалық күтімі деп аталады.

Теорема 4. *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты шартты математикалық күтімі $M(\xi|\eta)$ келесі қасиеттерге ие:*

1^0. Кез келген c нақты саны үшін $M(c|\eta) = c$;

2^0. Кез келген a, b нақты саны үшін $M((a\xi + b)|\eta) = aM(\xi|\eta) + b$;

3^0. ξ_1, ξ_2, η кездейсоқ шамалары үшін $M((\xi_1 + \xi_2)|\eta) = M(\xi_1|\eta) + M(\xi_2|\eta)$;

4^0. η кездейсоқ шамасы қай мән қабылдаса да ξ_1 және ξ_2 кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз болса, онда $M(\xi_1\xi_2|\eta) = M(\xi_1|\eta) \cdot M(\xi_2|\eta)$;

5^0. $M\xi = M(M(\xi|\eta))$;

6^0. ξ және η кездейсоқ шамаларының $u(\xi(\omega)), v(\eta(\omega))$ түрлендірулері үшін $M(u(\xi)v(\eta)|\eta) = v(\eta)M(u(\xi)|\eta)$;

7^0. ξ және η кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда $M(\xi|\eta) = M\xi$.

Анықтама 6. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін. $g(y) = M(\xi|\eta = y)$ функциясын *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына регрессия функциясы* немесе, жай ғана, *регрессиясы* деп, ал оның графигі *регрессия сызығы* деп аталады.

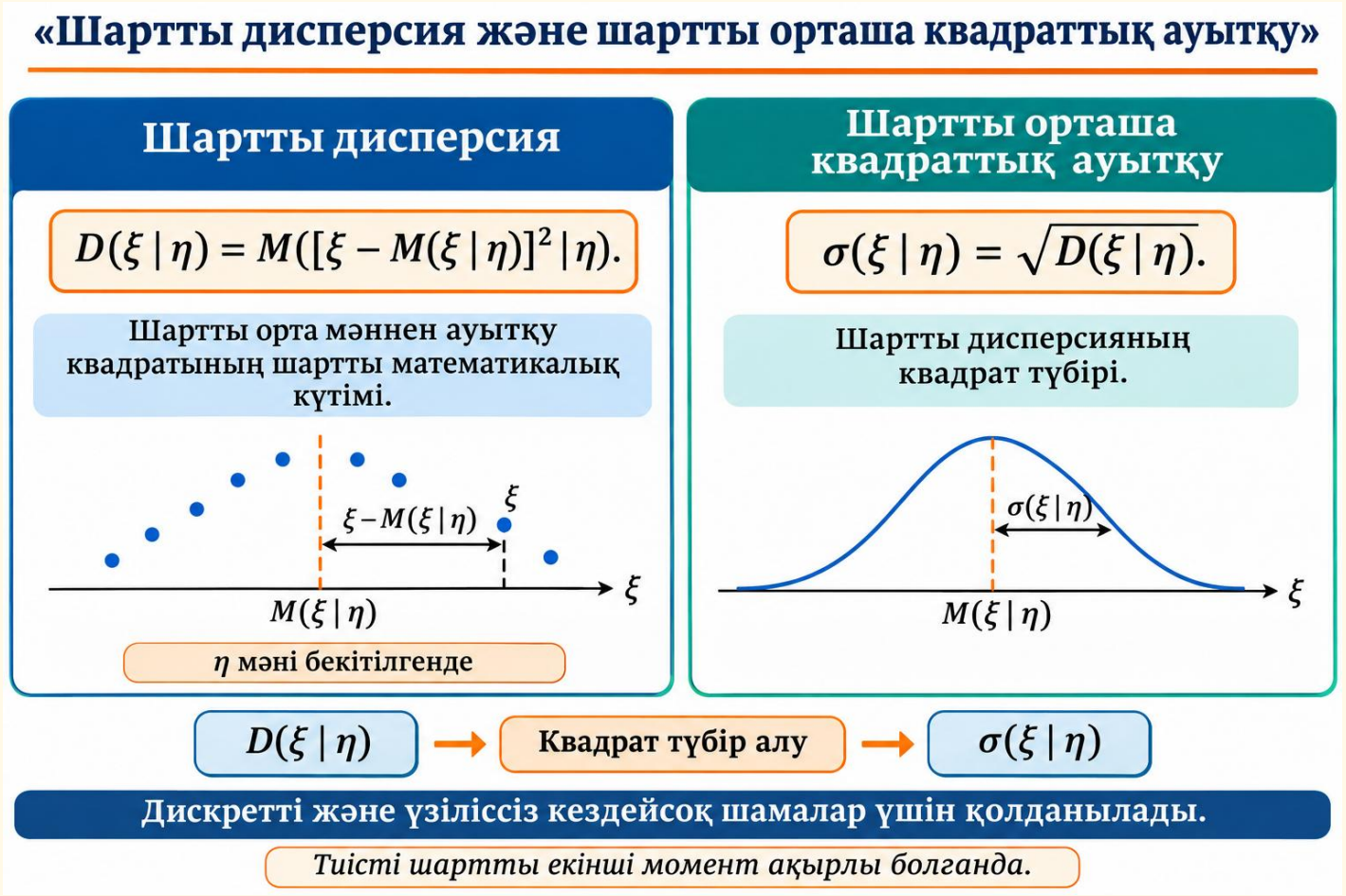
Анықтама 7. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін. $M\left([\xi - M(\xi|\eta)]^2|\eta\right)$ саны ξ *кездейсоқ шамасының* η *кездейсоқ шамасына қатысты шартты дисперсиясы* деп аталады да $D(\xi|\eta)$ арқылы белгіленеді.

Бұл анықтама екі өлшемді дискретті де, үзіліссіз де кездейсоқ шамалар үшін қолданылады.

Анықтама 8. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін.

$$\sigma(\xi|\eta) := \sqrt{D(\xi|\eta)}$$

саны ξ *кездейсоқ шамасының* η *кездейсоқ шамасына қатысты шартты орташа квадраттық ауытқуы* деп аталады.



Теорема 2. *ξ дискретті кездейсоқ шамасының η дискретті кездейсоқ шамасына қатысты шартты дисперсиясы* $D(\xi|\eta)$ келесі қасиеттерге ие:

1^0. Кез келген c нақты саны үшін $D(c|\eta) = 0$;

2^0. Кез келген a, b нақты сандары үшін $D((a\xi + b)|\eta) = a^2 D(\xi|\eta)$;

3^0. $D(\xi|\eta) = M\left(\xi^2|\eta\right) - [M(\xi|\eta)]^2$;

4^0. *η кездейсоқ шамасы қай мән қабылдаса да ξ_1 және ξ_2 кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз болса, онда* $D((\xi_1 + \xi_2)|\eta) = D(\xi_1|\eta) + D(\xi_2|\eta)$;

5^0. *ξ және η кездейсоқ шамаларының $u(\xi(\omega)), v(\eta(\omega))$ түрлендірулері үшін*

$$D(u(\xi)v(\eta)|\eta) = v^2(\eta)D(u(\xi)|\eta);$$

6^0. *Егер ξ және η кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда* $D(\xi|\eta) = D(\xi)$;

7^0. *ξ және η кездейсоқ шамалары үшін* $D(\xi) = M\left(D(\xi|\eta)\right) + M(M(\xi|\eta) - M\xi)^2$.

***Анықтама* 9.** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін.

$$\lambda(\xi|\eta) = \sqrt{1 - \frac{1}{D\xi} M[D(\xi|\eta)]}$$

және

$$\lambda(\eta|\xi) = \sqrt{1 - \frac{1}{D\eta} M[D(\eta|\xi)]}$$

сандары сәйкесінше *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына және η кездейсоқ шамасының ξ кездейсоқ шамасына корреляциялық қатынасы* деп аталады.

Негізгі әдебиеттер

1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

Назарларыңызға рахмет