14-дәріс

ШАРТТЫ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАР

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторы берілсін. ξ және η кездейсоқ шамаларының қабылдайтын мәндері сәйкесінше $x_j\ (j = 1, \dots, n)$ және $y_k\ (k = 1, \dots, m)$ болсын. $\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = y_k\}$ оқиғасы (шарт ретінде) орындалғанда $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j\}$ оқиғасының шартты ықтималдығы, яғни

$$p_{x_j|y_k} = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j | \eta(\omega) = y_k\}) =$$

$$= \frac{P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j, \eta(\omega) = y_k\})}{P(\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = y_k\})} = \frac{p_{j,k}}{p_{y_k}^{(\eta)}} \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$$

η кездейсоқ шамасы y_k мәнін қабылдағанда ξ кездейсоқ шамасының x_j мәнін қабылдау ықтималдылығы (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторының $p_{x_j|y_k} (j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m)$ *шартты ықтималдылығы* деп аталады, мұндағы $p_{jk} = P\left(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_j, \eta(\omega) = y_k\}\right)\ (j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m)$ ықтималдықтары (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторының бірлескен үлестірім қатары, ал $p_{y_k}^{(\eta)}\ (k = 1, \dots, m)$ - η кездейсоқ шамасының маргиналды үлестірімі.

Анықтама 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) дискретті кездейсоқ векторы η кездейсоқ шамасы $y_k\ (k = 1, \dots, m)$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының $p_{x_j|y_k}\ (j = 1, \dots, n)$ шартты үлестірімімен берілсін. *η кездейсоқ шамасы $y_k\ (k = 1, \dots, m)$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының шартты үлестірім функциясы* деп

$$F_\xi(x|\eta = y_k) = \frac{P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x, \eta(\omega) = y_k\})}{P(\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = y_k\})} = \sum_{i: x_i < x} p_{x_i|y_k}$$

функциясын айтамыз.

Анықтама 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы үзіліссіз ортақ үлестірім $p(x, y)$ тығыздығымен беріліп,

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy, \qquad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$$

маргиналды тығыздықтары болып, $\bar{y}$ нақты саны $p_\eta(\bar{y}) > 0$ болатындай бекітіліп алынсын.

$$p_\xi(x|\bar{y}) = \frac{p(x, \bar{y})}{p_\eta(\bar{y})} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

функциясы η кездейсоқ шамасы $\bar{y}$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының *шартты үлестірім тығыздығы* деп аталады.

Теорема 1. Әрбір $\bar{y}$ нақты саны үшін $p_\xi(x|\bar{y})$ шартты үлестірім тығыздығы x айнымалысы бойынша тығыздық функциясы болады.

Анықтама 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы үзіліссіз ортақ $p(x,y)$ үлестірім тығыздығымен беріліп,

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy, \qquad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

маргиналды тығыздықтары болып, $\bar{y}$ нақты саны $p_\eta(\bar{y}) > 0$ болатындай бекітіліп алынсын.

$$F_\xi(x|\bar{y}) = \frac{1}{p_\eta(\bar{y})} \int_{-\infty}^{x} p(u,\bar{y})\, du \quad (-\infty < x < +\infty)$$

η кездейсоқ шамасы $\bar{y}$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының *шартты үлестірім функциясы* деп аталады.

Анықтама 5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін. η кездейсоқ шамасына тәуелді

$$g(\eta) = M(\xi|\eta)$$

функциясын ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты шартты математикалық күтімі деп аталады.

ξ және η кездейсоқ шамалары мәндері сәйкесінше $x_1, \dots, x_n$ және $y_1, y_2, \dots, y_m$, ал η кездейсоқ шамасы y_k мәнін қабылдағанда ξ кездейсоқ шамасының x_j мәнін қабылдаудың шартты ықтималдықтары $p_{x_j|y_k}$ болсын. $\eta(\omega)=y_k$ болғандағы $M(\xi|\eta)$ шартты математикалық күтімінің мәні

$$g(y_k) = M(\xi|\eta = y_k) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, p_{x_j|y_k}$$

санына тең.

(ξ, η) екі өлшемді үзіліссіз кездейсоқ векторы мен $\bar{y}$ нақты саны үшін $p_\xi(x|\bar{y})$ $(-\infty < x < +\infty)$ функциясы η кездейсоқ шамасы $\bar{y}$ мәнін қабылдағандағы ξ кездейсоқ шамасының шартты үлестірім тығыздығы болсын. $\eta(\omega)=\bar{y}$ болғандағы $M(\xi|\eta)$ шартты математикалық күтімінің мәні

$$g(\bar{y}) = M(\xi|\eta = \bar{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x|\bar{y})dx$$

санына тең.

Теорема 4. *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты шартты математикалық күтімі $M(\xi|\eta)$ келесі қасиеттерге ие:*

1^0. Кез келген c нақты саны үшін $M(c|\eta) = c$;

2^0. Кез келген a, b нақты саны үшін $M((a\xi + b)|\eta) = aM(\xi|\eta) + b$;

3^0. ξ_1, ξ_2, η кездейсоқ шамалары үшін $M((\xi_1 + \xi_2)|\eta) = M(\xi_1|\eta) + M(\xi_2|\eta)$;

4^0. η кездейсоқ шамасы қай мән қабылдаса да ξ_1 және ξ_2 кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз болса, онда $M(\xi_1\xi_2|\eta) = M(\xi_1|\eta) \cdot M(\xi_2|\eta)$;

5^0. $M\xi = M(M(\xi|\eta))$;

6^0. ξ және η кездейсоқ шамаларының $u(\xi(\omega)), v\ (\eta(\omega))$ түрлендірулері үшін $M(u(\xi)v(\eta)|\eta) = v(\eta)M(u(\xi)|\eta)$;

7^0. ξ және η кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда $M(\xi|\eta) = M\xi$.

Анықтама 6. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін. $g(y) = M(\xi|\eta = y)$ функциясын *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына регрессия функциясы* немесе, жай ғана, *регрессиясы* деп, ал оның графигі *регрессия сызығы* деп аталады.

Анықтама 7. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін. $M([\xi - M(\xi|\eta)]^2|\eta)$ саны *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты шартты дисперсиясы* деп аталады да $D(\xi|\eta)$ арқылы белгіленеді.

Бұл анықтама екі өлшемді дискретті де, үзіліссіз де кездейсоқ шамалар үшін қолданылады.

Анықтама 8. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін.

$$\sigma(\xi|\eta) := \sqrt{D(\xi|\eta)}$$

саны *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты шартты орташа квадраттық ауытқуы* деп аталады.

Теорема 2. *ξ дискретті кездейсоқ шамасының η дискретті кездейсоқ шамасына қатысты шартты дисперсиясы* $D(\xi|\eta)$ келесі қасиеттерге ие:

1^0. Кез келген c нақты саны үшін $D(c|\eta) = 0$;

2^0. Кез келген a, b нақты сандары үшін $D((a\xi + b)|\eta) = a^2 D(\xi|\eta)$;

3^0. $D(\xi|\eta) = M(\xi^2|\eta) - [M(\xi|\eta)]^2$;

4^0. *η кездейсоқ шамасы қай мән қабылдаса да ξ_1 және ξ_2 кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз болса, онда* $D((\xi_1 + \xi_2)|\eta) = D(\xi_1|\eta) + D(\xi_2|\eta)$;

5^0. *ξ және η кездейсоқ шамаларының $u(\xi(\omega)), v(\eta(\omega))$ түрлендірулері үшін*

$$D(u(\xi)v(\eta)|\eta) = v^2(\eta)D(u(\xi)|\eta);$$

6^0. *Егер ξ және η кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда* $D(\xi|\eta) = D(\xi)$;

19.7^0. *ξ және η кездейсоқ шамалары үшін* $D(\xi) = M\big(D(\xi|\eta)\big) + M(M(\xi|\eta) - M\xi)^2$.

Анықтама 9. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторы берілсін.

$$\lambda(\xi|\eta) = \sqrt{1 - \frac{1}{D\xi} M[D(\xi|\eta)]}$$

және

$$\lambda(\eta|\xi) = \sqrt{1 - \frac{1}{D\eta} M[D(\eta|\xi)]}$$

сандары сәйкесінше *ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына және η кездейсоқ шамасының ξ кездейсоқ шамасына корреляциялық қатынасы* деп аталады.

$\lambda(\xi|\eta)$ корреляциялық қатынасы (ξ, η) кездейсоқ векторының дискретті және үзіліссіз болуына байланысты келесідей түрде есептеледі:

$$\lambda(\xi|\eta) = \sqrt{1 - \frac{1}{D\xi} \sum_{j=1}^{m} D\left(\xi|\eta = y_j\right) p_j^{\eta}},$$

және

$$\lambda(\xi|\eta) = \sqrt{1 - \frac{1}{D\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\xi|\eta = y) p_{\eta}(y) dy}.$$

Теорема 3. *ξ және η кездейсоқ шамаларының $\lambda(\xi|\eta)$ корреляциялық қатынасы келесі қасиеттерге ие*:

1^0. *Корреляциялық қатынасты* $\lambda(\xi|\eta) = \sqrt{\frac{1}{D\xi}\left(M\left(M(\xi|\eta)\right) - M\xi\right)^2}$ *түрінде де анықтауға болады;*

2^0. *Корреляциялық қатынас* $0 \le \lambda(\xi|\eta) \le 1$ *теңсіздігін қанағаттандырады*;

3^0. *Корреляциялық қатынас* $\lambda(\xi|\eta) = 1$ *теңдігі ξ кездейсоқ шамасы η кездейсоқ шамасына тәуелді (сызықты болуы міндетті емес) болғанда және тек сонда ғана орындалады;*

4^0. *Корреляциялық қатынас* $\lambda(\xi|\eta) = 0$ *теңдігі* $M(\xi|\eta) = c = M\xi$ *орындалғанда және тек сонда ғана орындалады;*

5^0. *Корреляция коэффициенті корреляция қатынасынан аспайды, яғни* $|\rho(\xi, \eta)| \le \lambda(\xi|\eta)$;

6^0. $|\rho(\xi, \eta)| = \lambda(\xi|\eta)$ *теңдігі ξ кездейсоқ шамасының η кездейсоқ шамасына қатысты регрессия сызығы түзу болғанда және тек сонда ғана орындалады.*