Дәріс 13

# КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ДИСПЕРСИЯСЫ. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ БАСҚА ДА САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

# Дәріс құрылымы

- Кездейсоқ шаманың дисперсиясы және оның қасиеттері
- Кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы
- Кездейсоқ шамалардың ковариациясы
- Кездейсоқ шамалардың корреляция коэффициенті
- Бастапқы және орталық моменттер
- Кездейсоқ шаманың асимметриясы, эксцессі, $\alpha$ деңгейлі квантилі, медианасы

***Анықтама 1.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен онда анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. $\xi$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқу квадратының математикалық күтімі (бар болған жағдайда) $\xi$ кездейсоқ шамасының *дисперсиясы* деп аталады да, $D\xi$ түрінде белгіленеді, яғни

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті $\xi$ кездейсоқ шамасы $(m \in N)$

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_\xi$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_m$ |

үлестіру қатарымен берілсе, онда $\xi$ дискретті кездейсоқ шамасының дисперсиясы

$$D\xi = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M\xi)^2 p_k.$$

Ал $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын дискретті, оның ішінде, мәндер жиыны саналымды болатын $\xi$ кездейсоқ шамасы

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_m$ | ... | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_\xi$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_m$ | ... | |

үлестіру қатарымен берілсе, онда $\xi$ дискретті кездейсоқ шамасының дисперсиясы

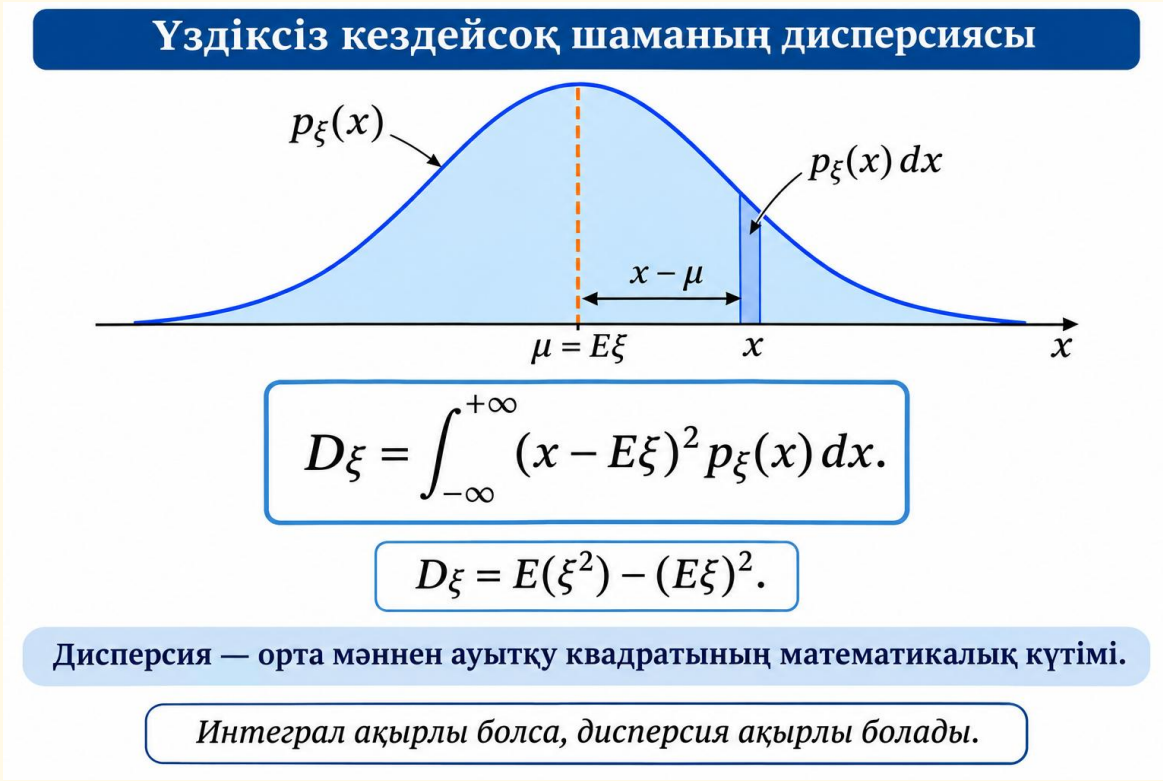
$$D\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k.$$

санына тең (қатар жинақталған жағдайда).

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын абсолютті үзіліссіз $\xi$ кездейсоқ шамасы $p(x)$ үлестірім тығыздығымен берілсе, онда бұл үзіліссіз кездейсоқ шамасының дисперсиясы (1) анықтамасына сәйкес

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x) dx$$

санына тең (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда).




***Анықтама 2.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, дисперсиясы ақырлы болатын $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін.

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

саны $\xi$ *кездейсоқ шамасының орташа квадраттық ауытқуы* деп аталады.

***Дисперсия келесідей қасиеттерге ие:***

$1^0$. Дисперсия теріс емес, яғни $D\xi \geq 0$.

$2^0$. $\Omega$ элементар оқиғалар жиынында $C$ мәнін 1 санына тең ықтималдықпен қабылдайтын $\xi$ кездейсоқ шамасының дисперсиясы 0 санына тең, яғни $D\xi = DC = 0$.

$3^0$. Кез келген $a, b$ нақты сандары үшін

$$D(a + b\xi) = b^2 D\xi.$$

$4^0$. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

$5^0$. $\xi, \eta$ кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2M[(\xi - M\xi)\,(\eta - M\eta)].$$

Жалпы жағдайда $\xi_1, \ldots, \xi_n\,(n \in N)$ кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n + 2\sum_{1 \leq j < k \leq n} M\left[(\xi_j - M\xi_j)(\xi_k - M\xi_k)\right].$$

$5^0$ қасиеттегі $M[(\xi - M\xi)\,(\eta - M\eta)]$ шамасы төменде анықталатын $\xi, \eta$ кездейсоқ шамаларының ковариациясы атты сандық сипаттамасын береді.

***Анықтама 3.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімдері ақырлы болатын $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары берілсін. $\xi - M\xi$ және $\eta - M\eta$ кездейсоқ шамаларының көбейтіндісінің математикалық күтімі (бар болған жағдайда) $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамаларының *ковариациясы* деп аталады да, $cov(\xi, \eta)$ түрінде белгіленеді, яғни

$$cov(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)].$$

*Ковариация келесі қасиеттерге ие*:

$1^0$. $\xi$ кездейсоқ шамасы үшін $cov(\xi, \xi) = 0$ теңдігі орындалады.

$2^0$. Егер $\xi$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда

$$cov(\xi, \eta) = 0$$

теңдігі орындалады.

Бұл қасиеттен дисперсияның $5^0$ қасиеті шығады: өзара тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n (n \in N)$ кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n).$$

$3^0$. $a_1, a_2, b_1, b_2$ нақты сандары мен $\xi_1 = a_1\eta_1 + b_1, \xi_2 = a_2\eta_2 + b_2$ кездейсоқ шамалары берілсін, онда

$$cov(\xi_1, \xi_2) = a_1 a_2 cov(\eta_1, \eta_2).$$

$4^0$. Кез келген $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары үшін

$$-\sqrt{D\xi D\eta} \leq cov(\xi, \eta) \leq \sqrt{D\xi D\eta}$$

теңсіздіктері орындалады.

$5^0$. $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары сызықты байланысқан болуы, яғни $\xi = a\eta + b$ болатындай $a, b$ нақты сандары табылуы үшін

$$|cov(\xi, \eta)| = \sqrt{D\xi D\eta}$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

$6^0$. $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары үшін

$$cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$$

теңдігі орындалады.

***Анықтама 4.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары берілсін. Егер

$$cov(\xi, \eta) = 0$$

болса, онда $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары *корреляцияланбаған* деп аталады.

***Анықтама 5.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дисперсиялары оң болатын $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары берілсін.

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

саны $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамаларының *корреляция коэффициенті* деп аталады.

***Корреляция коэффициенті келесі қасиеттерге ие*:**

$1^0$. $\xi$ кездейсоқ шамасы үшін $\rho(\xi, \xi) = 1$,

$2^0$. Егер $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда $\rho(\xi, \eta) = 0$.

$3^0$. $\rho(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = \pm\rho(\xi_1, \xi_2)$, бұнда «+» таңбасы $a_1, a_2$ сандарының таңбасы бірдей, ал «-» таңбасы қарама-қарсы болғанда қойылады.

$4^0$. $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары үшін

$$-1 \le \rho(\xi, \eta) \le 1.$$

$5^0$. Егер $\xi$ және $\eta$ кездейсоқ шамалары 1 санына тең ықтималдықпен сызықты байланысқан болса, яғни белгілі бір $a, b$ нақты сандары үшін $P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = a\eta(\omega) + b\}) = 1$ орындалса, онда

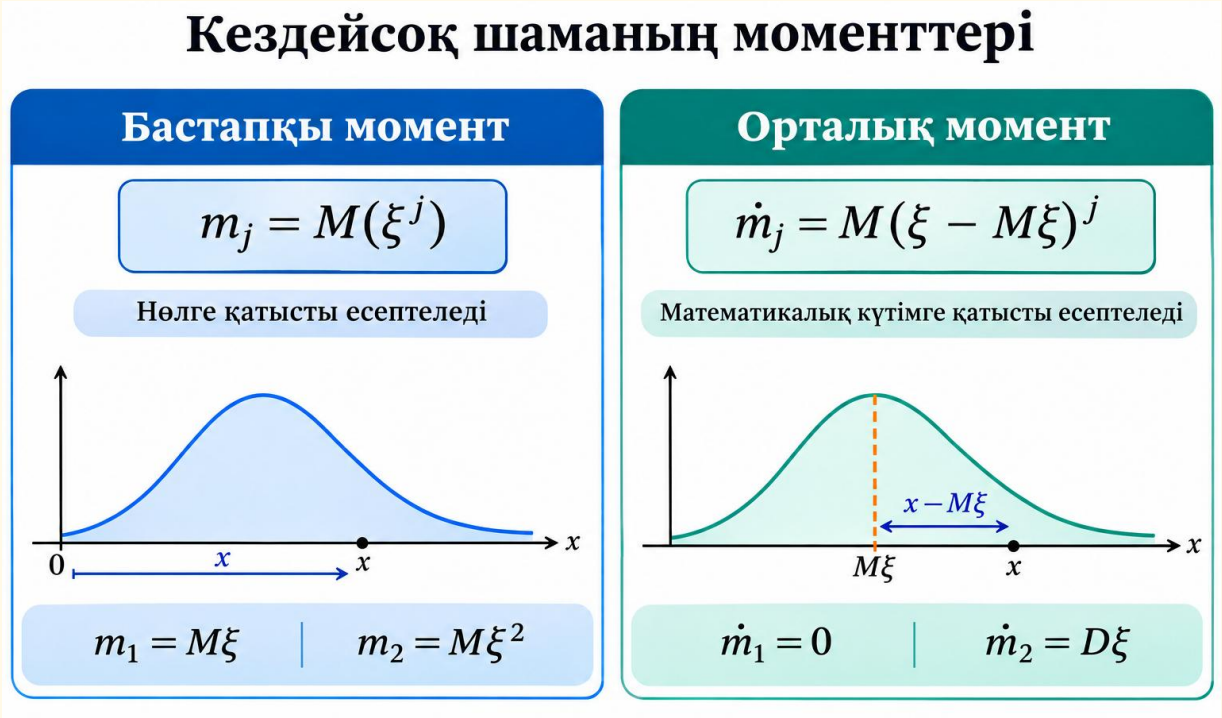
$$|\rho(\xi, \eta)| = 1.$$

***Анықтама 6.*** Оң бүтін $j$ саны мен $m_j = M\xi^j$ ақырлы болатын $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы берілсін. $m_j = M\xi^j$ саны $\xi$ кездейсоқ шамасының *$j$-ші ретті бастапқы моменті* деп аталады.

***Анықтама 7.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен онда анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. $\xi$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқуының $j$-ші дәрежесінің математикалық күтімі, яғни

$$\dot{m}_j = M\,(\xi - M\xi)^j$$

саны (бар болған жағдайда) $\xi$ кездейсоқ шамасының *$j$-ші ретті орталық моменті* деп аталады.



***Анықтама 8.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. $\tilde{m}_j = M|\xi|^j$ және $\dot{\tilde{m}}_j = M|\xi - M\xi|^j$ сандары $\xi$ кездейсоқ шамасының сәйкес *j-ші ретті абсолютті бастапқы моменті* және *j-ші ретті абсолютті орталық моменті* деп аталады (сәйкесінше бұл математикалық күтімдер бар болған жағдайда).

**Теорема 1.** *Кездейсоқ шаманың j-ші ретті моменті бар болса, онда одан кіші кез келген ретті моменті бар болады.*

***Анықтама 9.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. $\xi$ кездейсоқ шамасының 3-ші ретті орталық моментінің орташа квадраттық ауытқуының кубына қатынасы, яғни

$$A = \frac{\dot{m}_3}{\sigma^3}$$

саны $\xi$ кездейсоқ шамасының *асимметриясы* деп аталады.

Асимметрия 3-ші ретті орталық моментті орташа квадраттық ауытқуымен нормаландыру арқылы кездейсоқ шаманың өз математикалық күтіміне қарағанда қаншалықты симметриялы орналасатындығын сипаттайды.

***Анықтама 10.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. Кездейсоқ шаманың 4-ші ретті орталық моментінің дисперсиясының квадратына (немесе орташа квадраттық ауытқуының 4 дәрежесіне) қатынасынан 3 санын алып тастағанда шыққан шама, яғни

$$E = \frac{\dot{m}_4}{\sigma^4} - 3$$

саны $\xi$ кездейсоқ шамасының *эксцессі* деп аталады.

***Анықтама 11.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ кездейсоқ шамасы және $0 \leq \alpha \leq 1$ саны берілсін.

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < Q_\alpha\}) \leq \alpha$$

немесе

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > Q_\alpha\}) \leq 1 - \alpha$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын $Q_\alpha$ саны $\xi$ кездейсоқ шамасының $\alpha$ *деңгейлі квантилі* немесе $\alpha$ *-квантилі* деп аталады.

***Анықтама 12.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. $\alpha = \frac{1}{2}$ *деңгейлі квантиль* $\xi$ кездейсоқ шамасының *M медианасы* деп аталады.

**Теорема 2.** *$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi$ кездейсоқ шамасының мәндері $I$ интервалында жатып, $g(x)$ сол интервалда анықталған биективті функция болсын. Егер $M$ саны $\xi$ кездейсоқ шамасының медианансы болса, онда $g(M)$ саны $g(\xi)$ кездейсоқ шамасының медианасы болады.*

***Анықтама 13.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған үзіліссіз $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. $\xi$ кездейсоқ шамасының $p(x)$ үлестірім тығыздығының локалды максимум нүктесі *мода* деп аталады.

Егер бір ғана модасы бар болса, кездейсоқ шама *унимодалық* деп, екі модасы бар болса, *бимодалық* деп, екіден көп модасы бар болса, *мультимодалық* үлестірім деп аталады.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. Ықтималдығы үшін

$$p_{i-1} < p_i \text{ және } p_{i+1} < p_i$$

теңсіздігі орындалатын $x_i$ мәні $\xi$ кездейсоқ шамасының модасына тең.

***Анықтама 14.*** $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті $\xi$ кездейсоқ шамасы берілсін. Глобалді максимум болатын мода ең ықтималды мән деп аталады.

# Негізгі әдебиеттер


1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

# Назарларыңызға рахмет