13-ДӘРІС

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ДИСПЕРСИЯСЫ. КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ БАСҚА ДА САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен онда анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқу квадратының математикалық күтімі (бар болған жағдайда) ξ кездейсоқ шамасының *дисперсиясы* деп аталады да, $D\xi$ түрінде белгіленеді, яғни

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 .$$

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті ξ кездейсоқ шамасы $(m \in N)$

ξ	x_1	x_2	...	x_m
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m

үлестіру қатарымен берілсе, онда ξ дискретті кездейсоқ шамасының дисперсиясы (1) анықтамасына сәйкес

$$D\xi = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M\xi)^2 \, p_k .$$

Ал $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын дискретті, оның ішінде, мәндер жиыны саналымды болатын ξ кездейсоқ шамасы

ξ	x_1	x_2	...	x_m	...	
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m	...	

үлестіру қатарымен берілсе, онда ξ дискретті кездейсоқ шамасының дисперсиясы

$$D\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - M\xi)^2 \, p_k .$$

санына тең (қатар жинақталған жағдайда).

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын абсолютті үзіліссіз ξ кездейсоқ шамасы $p(x)$ үлестірім

тығыздығымен берілсе, онда бұл үзіліссіз кездейсоқ шамасының дисперсиясы (1) анықтамасына сәйкес

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \, p(x)dx$$

санына тең (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда).

Дисперсия келесідей қасиеттерге ие:

1^0. Дисперсия теріс емес, яғни $D\xi \geq 0$.

2^0. Ω элементар оқиғалар жиынында C мәнін 1 санына тең ықтималдықпен қабылдайтын ξ кездейсоқ шамасының дисперсиясы 0 санына тең, яғни $D\xi = DC = 0$.

3^0. Кез келген a, b нақты сандары үшін

$$D(a + b\xi) = b^2 D\xi.$$

4^0. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

5^0. ξ, η кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2M[(\xi - M\xi)\,(\eta - M\eta)].$$

Жалпы жағдайда $\xi_1, \ldots, \xi_n (n \in N)$ кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} M\big[(\xi_j - M\xi_j)(\xi_k - M\xi_k)\big].$$

5^0 қасиеттегі $M[(\xi - M\xi)\,(\eta - M\eta)]$ шамасы төменде анықталатын ξ, η кездейсоқ шамаларының ковариациясы атты сандық сипаттамасын береді.

Егер $\xi_1, \ldots, \xi_n (n \in N)$ кездейсоқ шамалары өзара тәуелсіз болса, онда математикалық күтімнің 16.7^0 қасиеті бойынша

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} M\big[(\xi_j - M\xi_j)(\xi_k - M\xi_k)\big] = 0$$

болып,

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n$$

теңдігі орындалады.

Анықтама 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, дисперсиясы ақырлы болатын ξ кездейсоқ шамасы берілсін.

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

саны ξ *кездейсоқ шамасының орташа квадраттық ауытқуы* деп аталады.

Анықтама 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімдері ақырлы болатын ξ және η кездейсоқ шамалары берілсін. $\xi - M\xi$ және $\eta - M\eta$ кездейсоқ шамаларының көбейтіндісінің математикалық күтімі (бар болған жағдайда) ξ және η кездейсоқ шамаларының *ковариациясы* деп аталады да, $cov(\xi, \eta)$ түрінде белгіленеді, яғни

$$cov(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)].$$

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ, η) ақырлы мәнді дискретті кездейсоқ векторы

ξ / η	y_1	y_2	…	y_m	P_ξ
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	p_{x_1}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	p_{x_2}
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	p_{x_n}
P_η	p_{y_1}	p_{y_2}	…	p_{y_m}	

үлестіру қатарымен берілсе, онда ξ және η кездейсоқ шамаларының ковариациясы (5) формуласына сәйкес

$$cov(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (x_j - M\xi)(y_k - M\eta) p_{jk}$$

санына тең.

Ал ξ және η кездейсоқ шамаларының бірі саналымды, екіншісі ақырлы мәндер қабылдаса, мысалы ξ саналымды, η ақырлы мән қабылдаса, яғни

ξ / η	y_1	y_2	…	y_m	P_ξ
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	p_{x_1}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	p_{x_2}
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	p_{x_n}
…	…	…	…	…	…
P_η	p_{y_1}	p_{y_2}	…	p_{y_m}	

үлестірім қатарымен берілсе, онда олардың ковариациясы (17.5) анықтамасына сәйкес

$$cov(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\big(x_j-M\xi\big)(y_k-M\eta)p_{jk}$$

санына тең (қатар жинақталған жағдайда).

ξ және η кездейсоқ шамаларының екеуі де саналымды мәндер қабылдаса, яғни (ξ,η) кездейсоқ векторы

ξ / η	y_1	y_2	…	y_m	…	P_ξ
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	…	p_{x_1}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	…	p_{x_2}
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	…	p_{x_n}
…	…	…	…	…	…	…
P_η	p_{y_1}	p_{y_2}	…	p_{y_m}	…	

үлестірім қатарларымен берілсе, онда олардың ковариациясы (5) анықтамасына сәйкес

$$cov(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\big(x_j-M\xi\big)(y_k-M\eta)p_{jk}$$

санына тең болады (қатар жинақталған жағдайда), мұндағы $p_{jk}=P(\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_j,\eta(\omega)=y_k\})$.

$(\Omega,\sigma F,P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған математикалық күтімдері ақырлы болатын үзіліссіз ξ және η кездейсоқ шамалары мен (ξ,η) кездейсоқ векторы $p_{\xi,\eta}\ (x,y)$ үлестірім тығыздықтарымен берілсін, онда ξ және η кездейсоқ шамаларының ковариациясы (17.5) анықтамасына сәйкес

$$cov(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)(y-M\eta)p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

санына тең (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда).

Ковариация келесі қасиеттерге ие:

1^0. ξ кездейсоқ шамасы үшін $cov(\xi,\xi)=0$ теңдігі орындалады.

2^0. Егер ξ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда

$$cov(\xi,\eta)=0$$

теңдігі орындалады.

Бұл қасиеттен дисперсияның 5^0 қасиеті шығады: өзара тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n (n \in N)$ кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D\ (\xi_n).$$

3^0. a_1, a_2, b_1, b_2 нақты сандары мен $\xi_1 = a_1\eta_1 + b_1, \xi_2 = a_2\eta_2 + b_2$ кездейсоқ шамалары берілсін, онда

$$cov(\xi_1, \xi_2) = a_1 a_2 cov\ (\eta_1, \eta_2).$$

4^0. Кез келген ξ және η кездейсоқ шамалары үшін

$$-\sqrt{D\xi D\eta} \leq cov(\xi, \eta) \leq \sqrt{D\xi D\eta}$$

теңсіздіктері орындалады.

5^0. ξ және η кездейсоқ шамалары сызықты байланысқан болуы, яғни $\xi = a\eta + b$ болатындай a, b нақты сандары табылуы үшін

$$|cov(\xi, \eta)| = \sqrt{D\xi D\eta}$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

6^0. ξ және η кездейсоқ шамалары үшін

$$cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$$

теңдігі орындалады.

Анықтама 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ және η кездейсоқ шамалары берілсін. Егер

$$cov(\xi, \eta) = 0$$

болса, онда ξ және η кездейсоқ шамалары *корреляцияланбаған* деп аталады.

Анықтама 5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дисперсиялары оң болатын ξ және η кездейсоқ шамалары берілсін.

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

саны ξ және η кездейсоқ шамаларының *корреляция коэффициенті* деп аталады.

Корреляция коэффициенті келесі қасиеттерге ие:

1^0. ξ кездейсоқ шамасы үшін $\rho(\xi, \xi) = 1$,

2^0. Егер ξ және η кездейсоқ шамалары тәуелсіз болса, онда $\rho(\xi, \eta) = 0$.

3^0. $\rho(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = \pm\rho(\xi_1, \xi_2)$, бұнда «+» таңбасы a_1, a_2 сандарының таңбасы бірдей, ал «-» таңбасы қарама-қарсы болғанда қойылады.

4^0. ξ және η кездейсоқ шамалары үшін

$$-1 \le \rho(\xi,\eta) \le 1.$$

5^0. Егер ξ және η кездейсоқ шамалары 1 санына тең ықтималдықпен сызықты байланысқан болса, яғни белгілі бір a, b нақты сандары үшін $P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = a\eta(\omega) + b\}) = 1$ орындалса, онда

$$|\rho(\xi,\eta)| = 1.$$

Анықтама 6. Оң бүтін j саны мен $m_j = M\xi^j$ ақырлы болатын $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы берілсін. $m_j = M\xi^j$ саны ξ кездейсоқ шамасының *j-ші ретті бастапқы моменті* деп аталады.

Егер $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы дискретті болса, онда оның мәндер жиыны Ω_ξ ақырлы не саналымды (саналымдыдан артық емес деуге де болады) жиын болатындығы белгілі.

Алдымен, $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасының мәндер жиыны ақырлы болған жағдайды қарастырайық, онда оның үлестіру қатары

$\Omega_\xi = \xi(\Omega)$	x_1	x_2	...	x_m
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m

Бұл жағдайда ξ кездейсоқ шамасының j -ші ретті бастапқы моменті математикалық күтімнің 16.8^0 қасиеті бойынша

$$m_j = x_1^j p_1 + \ldots + x_m^j p_m = \sum_{k=1}^{m} x_k^j p_k = \sum_{k=1}^{m} x_k^j \sum_{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_k} p(\omega)$$
$$= \sum_{\omega\in\Omega} \big(\xi(\omega)\big)^j p(\omega)$$

санына тең.

Енді Ω_ξ жиыны саналымды болсын, онда

$$m_j = M\xi^j = x_1^j p_1 + \ldots + x_m^j p_m + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^j p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^j \sum_{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_k} p(\omega)$$
$$= \sum_{\omega\in\Omega} \big(\xi(\omega)\big)^j p(\omega)$$

саны (қатар жинақталған жағдайда) $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасының j-ші ретті бастапқы моментіне тең.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған абсолютті үзіліссіз $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы өзінің $p(x)$ үлестірім тығыздығымен берілсін.

$$m_j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j p(x)dx$$

саны (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда) $\xi: \Omega \mapsto R$ абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамасының j-ші ретті бастапқы моменті болады.

Анықтама 7. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі мен онда анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасының математикалық күтімінен ауытқуының j-ші дәрежесінің математикалық күтімі, яғни

$$\dot{m}_j = M\,(\xi - M\xi)^j$$

саны (бар болған жағдайда) ξ кездейсоқ шамасының *j-ші ретті орталық моменті* деп аталады.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті ξ кездейсоқ шамасы
$(m \in N)$

ξ	x_1	x_2	...	x_m
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m

үлестіру қатарымен берілсе, онда бұл дискретті ξ кездейсоқ шамасының *j-ші ретті орталық моменті*

$$\dot{m}_j = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M\xi)^j\, p_k$$

санына тең болады.

Ал үлестірім қатары (Ω_ξ саналымды болған жағдайда)

ξ	x_1	x_2	...	x_m	...
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m	...

болса, онда бұл дискретті кездейсоқ шамасының *j-ші ретті орталық моменті*

$$\dot{m}_j = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - M\xi)^j\, p_k$$

санына тең (қатар жинақталған жағдайда).

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған, математикалық күтімі ақырлы болатын абсалютті үзіліссіз ξ кездейсоқ шамасы $p(x)$ тығыздығымен берілсе, онда бұл анықтамадағы меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда ξ кездейсоқ шамасының *j-ші ретті орталық моменті* 18.2 анықтамасына сәйкес

$$\dot{m}_j = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^j p(x)dx$$

санына тең.

Анықтама 8. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $\tilde{m}_j = M|\xi|^j$ және $\dot{\tilde{m}}_j = M|\xi - M\xi|^j$сандары ξ кездейсоқ шамасының сәйкес *j-ші ретті абсолютті бастапқы моменті* және *j-ші ретті абсолютті орталық моменті* деп аталады (сәйкесінше бұл математикалық күтімдер бар болған жағдайда).

Теорема 1. *Кездейсоқ шаманың j-ші ретті моменті бар болса, онда одан кіші кез келген ретті моменті бар болады.*

Анықтама 9. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасының 3-ші ретті орталық моментінің орташа квадраттық ауытқуының кубына қатынасы, яғни

$$A = \frac{\dot{m}_3}{\sigma^3}$$

саны ξ кездейсоқ шамасының *асимметриясы* деп аталады.

Асимметрия 3-ші ретті орталық моментті орташа квадраттық ауытқуымен нормаландыру арқылы кездейсоқ шаманың өз математикалық күтіміне қарағанда қаншалықты симметриялы орналасатындығын сипаттайды.

Анықтама 10. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Кездейсоқ шаманың 4-ші ретті орталық моментінің дисперсиясының квадратына (немесе орташа квадраттық ауытқуының 4 дәрежесіне) қатынасынан 3 санын алып тастағанда шыққан шама, яғни

$$E = \frac{\dot{m}_4}{\sigma^4} - 3$$

саны ξ кездейсоқ шамасының *эксцессі* деп аталады.

Анықтама 11. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы және $0 \leq \alpha \leq 1$ саны берілсін.

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < Q_\alpha\}) \leq \alpha$$

немесе

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > Q_\alpha\}) \leq 1 - \alpha$$

теңсіздіктерін қанағаттандыратын Q_α саны ξ кездейсоқ шамасының α *деңгейлі квантилі* немесе α *-квантилі* деп аталады.

Анықтама 12. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $\alpha = \frac{1}{2}$ *деңгейлі квантиль* ξ кездейсоқ шамасының *M медианасы* деп аталады.

Анықтаманы, басқаша келесі түрде де беруге болады. *M* өзінен сол жақта жатқан мәндердің жиынында жатса,

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq M\}) \geq P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > M\})$$

теңсіздігі, ал оң жағында жатса,

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq M\}) \geq P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < M\})$$

теңсіздігі орындалса, онда медиана *M* нүктесінде жатады.

Және де,

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < M\}) \geq P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > M\})$$

теңсіздігі орындалса, яғни *M* нүктесінде ықтималдылығы тең екіге бөлінсе, онда сөзсіз *M* кездейсоқ шаманың медианасы болады.

Бұл жағдайда, $\alpha = \frac{1}{2}$ *деңгейлі квантиль* барлық медианалардың минимумы болады.

(Ω, F, P) ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ үзіліссіз кездейсоқ шамасы $F(x)$ үлестірім функциясымен берілсе, онда оның α-*квантилі*

$$F(Q_\alpha) = \alpha$$

теңдеуінің, ал $p(x)$ үлестірім тығыздығымен берілсе

$$\int_{-\infty}^{Q_\alpha} p(x)dx = \alpha$$

теңдеуінің шешімі болады.

Теорема 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігінде анықталған* ξ *кездейсоқ шамасының мәндері I интервалында жатып,* $g(x)$ *сол интервалда анықталған биективті функция болсын. Егер M саны* ξ *кездейсоқ шамасының медианансы болса, онда* $g(M)$ *саны* $g(\xi)$ *кездейсоқ шамасының медианасы болады.*

Анықтама 13. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған үзіліссіз ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасының $p(x)$ үлестірім тығыздығының локалды максимум нүктесі *мода* деп аталады.

Егер бір ғана модасы бар болса, кездейсоқ шама *унимодалық* деп, екі модасы бар болса, *бимодалық* деп, екіден көп модасы бар болса, *мультимодалық* үлестірім деп аталады.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Ықтималдығы үшін

$$p_{i-1} < p_i \text{ және } p_{i+1} < p_i$$

теңсіздігі орындалатын x_i мәні ξ кездейсоқ шамасының модасына тең.

Анықтама 14. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған дискретті ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Глобалді максимум болатын мода ең ықтималды мән деп аталады.