EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 12

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ КҮТІМ

Дәріс құрылымы

- Орташа мән
- Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың математикалық күтімі
- Математикалық күтімнің қасиеттері

Орташа мән. Бірнеше санды бір санмен сипаттау керек болған кезде орташа мән ұғымын енгізу қажет болады.

Анықтама 1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in N)$ сандары берілсін. Осы n санның әрқайсысын қосындыларының мәні өзгермейтіндей етіп алмастыра алатын, яғни

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \ldots + \bar{x} = n\bar{x}$$

теңдігін қанағаттандыратын $\bar{x}$ саны $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандарының *арифметикалық ортасы* деп аталады да және $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандарының арифметикалық ортасы $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ санына тең.



$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ дискретті кездейсоқ шама берілсін.

$\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамамен анықталған $(\Omega_\xi, F_\xi, P_\xi)$ ықтималдық кеңістігі төмендегі кестемен анықталсын:

Ω_ξ	x_1	x_2	...	x_m
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m

мұндағы

$$p_k = P\left(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_k\}\right) (k = 1,2,\ldots,m).$$

Анықтама 2.

$$M\xi = x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m = \sum_{k=1}^{m} x_k p_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_k} P(\{\omega\})$$

саны $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған мәндер жиыны ақырлы болатын $\xi: \Omega \mapsto R$ *дискретті кездейсоқ шамасының* $M\xi$ *математикалық күтімі* немесе *орташа мәні* деп аталады.

$\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы дискретті болғанда Ω_{ξ} жиыны саналымды да болады. Онда

Анықтама 3.

$$M\xi = x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \sum_{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_k} P(\{\omega\})$$

саны (бұл қатар жинақталған жағдайда) $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi\colon \Omega \mapsto R$ мәндер жиыны саналымды *дискретті кездейсоқ шамасының ξ математикалық күтімі* немесе *орташа мәні* деп аталады.

Кездейсоқ шама тек оң мәндер ғана емес, сонымен қатар теріс бүтін сандарды да қабылдауы мүмкін.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi\colon \Omega \mapsto R$ үзіліссіз кездейсоқ шамасы өзінің $p(x)$ үлестірім тығыздығымен берілсін.

Анықтама 4.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

саны (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда) $\xi\colon \Omega \mapsto R$ *үзіліссіз кездейсоқ шамасының ξ математикалық күтімі* немесе *орташа мәні* деп аталады.

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімі келесі қасиеттерге ие.

16.1^0. Егер $\xi(\omega) \equiv c$ тұрақты функция болса, онда $Mc = c$;

16.2^0. Біртектілігі: кез келген c саны үшін $M(c\xi) = cM\xi$ орындалады;

16.3^0. Сызықтылығы: кез келген ξ және η кездейсоқ шамалары үшін $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, яғни қосындының математикалық күтімі математикалық күтімдерінің қосындысына тең;

16.4^0. $A \in F$ оқиғасы берілсін, онда осы оқиғаның $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, \text{егер } \omega \in A, \\ 0, \text{егер } \omega \notin A \end{cases}$ характеристикалық функциясының математикалық күтімі оның ықтималдылығына тең, яғни $M\chi_A = P(A)$;

16.5^0. Егер $\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы өзара қиылыспайтын $B_l \in \sigma F$ $(l = 1, \ldots, k)$ оқиғаларында $\xi(\omega) = c_l$ тұрақты болып, B_l оқиғалары үшін $B_1 \cup \ldots \cup B_k = \Omega$ орындалса, онда олардың сызықтық комбинациясы болатын $\xi(\omega) = c_1\chi_{B_1}(\omega) + \ldots + c_k\chi_{B_k}(\omega)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі $M\xi = c_1P(B_1) + \ldots + c_kP(B_k)$;

16.7^0. ξ және η кездейсоқ шамалары беріліп және олар тәуелсіз болса, онда олардың $\xi\eta$ көбейтіндісінің математикалық күтімі математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең болады, яғни $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$;

16.8^0. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi\colon \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы, кем дегенде ξ кездейсоқ шамасының $\xi(\Omega)$мәндер жиынында анықталған $g(x)$ функциясы берілсін. Онда $g(\xi)$ кездейсоқ шамасы дискретті болғанда

$$Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k)P(\{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) = x_k\}) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k)p_k\,,$$

үзіліссіз болғанда

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

теңдіктері орындалады.

16.9^0. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді дискретті кездейсоқ шамасы p_{jk} ықтималдылығымен берілсін. Онда $\xi_1(\Omega) \times \xi_2(\Omega)$ жиынында анықталған $g(x_1, x_2)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg(\xi) = \sum_{j,k} g(\xi_1, \xi_2) p_{jk}$$

санына тең.

Ал егер $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді кездейсоқ шама үзіліссіз болса, онда

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy$$

санына тең.

16.10^0. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ дискретті кездейсоқ вектор $p_{j_1 \ldots j_n} = P\left(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = x_{j_1}, \ldots, \xi_n(\omega) = x_{j_n}\}\right)$ ықтималдықтарымен берілсін (x_k мәндері $\xi_k(\omega)(k = 1, \ldots, n)$ кездейсоқ шамасының барлық мүмкін мәндерін қабылдайды). $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының мәндер жиынында анықталған $g(x_1, \ldots, x_n)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg(\xi) = \sum_{x_1, \ldots, x_n} g(x_1, \ldots, x_n) p_{j_1 \ldots j_n}$$

санына тең.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамаларының бірлескен $n-$ өлшемді үлестірім тығыздығы $p(x_1, \ldots, x_n)$ болсын. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының мәндер жиынында анықталған n айнымалы $g(x_1, \ldots, x_n)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

санына тең.

Негізгі әдебиеттер

1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

Назарларыңызға рахмет