12-ДӘРІС

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ КҮТІМ

Орташа мән. Бірнеше санды бір санмен сипаттау керек болған кезде орташа мән ұғымын енгізу қажет болады.

Анықтама 1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in N)$ сандары берілсін. Осы n санның әрқайсысын қосындыларының мәні өзгермейтіндей етіп алмастыра алатын, яғни

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \ldots + \bar{x} = n\bar{x}$$

теңдігін қанағаттандыратын $\bar{x}$ саны $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандарының *арифметикалық ортасы* деп аталады да және $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандарының арифметикалық ортасы

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

санына тең.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ сандары тек бір рет қана кездеспеуі мүмкін. Оларды топтастырып
жазайық, x_1 саны b_1 рет, x_2 саны b_2 рет, т.с.с. x_m саны b_m рет кездессін және

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = n\,.$$

Онда анықтама келесідей беріледі:

Егер әрбір x_k $(k = 1, \ldots, m, m \in N)$ мәнінің өз b_k «салмағы» бар болса, онда *арифметикалық орта*

$$\bar{x} = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m}{n} = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m}{b_1 + b_2 + \ldots + b_m} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_m x_m,$$

санына тең, мұндағы

$$p_k = \frac{b_k}{b_1 + b_2 + \ldots + b_m} (k = 1,2, \ldots, m).$$

$b_1, \ldots, b_m$ кез келген оң сан. Олар тек оң бүтін болғанда сәйкес x_k мәндерінің кездесу санын көрсетеді.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ дискретті кездейсоқ шама берілсін.

$\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамамен анықталған $(\Omega_\xi, F_\xi, P_\xi)$ ықтималдық кеңістігі төмендегі кестемен анықталсын:

$\Omega_\xi = \xi\ (\Omega)$	x_1	x_2	...	x_m
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m

мұндағы

$$p_k = P\ (\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_k\})\ (k = 1,2,\dots,m).$$

Анықтама 2.

$$M\xi = x_1p_1 + \dots + x_mp_m = \sum_{k=1}^{m} x_kp_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_k} P(\{\omega\})$$

саны $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған мәндер жиыны ақырлы болатын $\xi: \Omega \mapsto R$ *дискретті кездейсоқ шамасының* $M\xi$ *математикалық күтімі* немесе *орташа мәні* деп аталады.

$\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы дискретті болғанда Ω_ξ жиыны саналымды да болады. Онда

Анықтама 3.

$$M\xi = x_1p_1 + \dots + x_mp_m + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} x_kp_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \sum_{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_k} P(\{\omega\})$$

саны (бұл қатар жинақталған жағдайда) $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ мәндер жиыны саналымды *дискретті кездейсоқ шамасының* ξ *математикалық күтімі* немесе *орташа мәні* деп аталады.

Кездейсоқ шама тек оң мәндер ғана емес, сонымен қатар теріс бүтін сандарды да қабылдауы мүмкін.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ үзіліссіз кездейсоқ шамасы өзінің $p(x)$ үлестірім тығыздығымен берілсін.

Анықтама 4.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

саны (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда) $\xi: \Omega \mapsto R$ *үзіліссіз кездейсоқ шамасының* ξ *математикалық күтімі* немесе *орташа мәні* деп аталады.

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімі келесі қасиеттерге ие.

16.1^0. Егер $\xi(\omega) \equiv c$ тұрақты функция болса, онда $Mc = c$;

16.2^0. Біртектілігі: кез келген c саны үшін $M(c\xi) = cM\xi$ орындалады;

16.3^0. Сызықтылығы: кез келген ξ және η кездейсоқ шамалары үшін $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, яғни қосындының математикалық күтімі математикалық күтімдерінің қосындысына тең;

16.4^0. $A \in F$ оқиғасы берілсін, онда осы оқиғаның $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, \text{егер } \omega \in A, \\ 0, \text{егер } \omega \notin A \end{cases}$ характеристикалық функциясының математикалық күтімі оның ықтималдылығына тең, яғни $M\chi_A = P(A)$;

16.5^0. Егер $\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы өзара қиылыспайтын $B_l \in \sigma F$ $(l = 1, \ldots, k)$ оқиғаларында $\xi(\omega) = c_l$ тұрақты болып, B_l оқиғалары үшін $B_1 \cup \ldots \cup B_k = \Omega$ орындалса, онда олардың сызықтық комбинациясы болатын $\xi(\omega) = c_1\chi_{B_1}(\omega) + \ldots + c_k\chi_{B_k}(\omega)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі $M\xi = c_1P(B_1) + \ldots + c_kP(B_k)$;

16.6^0. Математикалық күтімнің монотондылығы: $\xi: \Omega \mapsto R$ және $\eta: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамалары берілсін және әр $\omega \in \Omega$ үшін $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ теңсіздігі орындалсын, онда $M\xi \leq M\eta$;

16.7^0. ξ және η кездейсоқ шамалары беріліп және олар тәуелсіз болса, онда олардың $\xi\eta$ көбейтіндісінің математикалық күтімі математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең болады, яғни $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$;

16.8^0. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы, кем дегенде ξ кездейсоқ шамасының $\xi(\Omega)$мәндер жиынында анықталған $g(x)$ функциясы берілсін. Онда $g(\xi)$ кездейсоқ шамасы дискретті болғанда

$$Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k)P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_k\}) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k)p_k,$$

үзіліссіз болғанда

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

теңдіктері орындалады.

16.9^0. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді дискретті кездейсоқ шамасы p_{jk} ықтималдылығымен берілсін. Онда $\xi_1(\Omega) \times \xi_2(\Omega)$ жиынында анықталған $g(x_1, x_2)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg(\xi) = \sum_{j,k} g(\xi_1, \xi_2)p_{jk}$$

санына тең.

Ал егер $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді кездейсоқ шама үзіліссіз болса, онда

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)p(x, y)dxdy$$

санына тең.

16.10^0. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ дискретті кездейсоқ вектор $p_{j_1 \ldots j_n} = P\left(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = x_{j_1}, \ldots, \xi_n(\omega) = x_{j_n}\}\right)$ ықтималдықтарымен берілсін (x_k мәндері $\xi_k(\omega)(k = 1, \ldots, n)$ кездейсоқ шамасының барлық мүмкін мәндерін қабылдайды). $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының мәндер жиынында анықталған $g(x_1, \ldots, x_n)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg(\xi) = \sum_{x_1, \ldots, x_n} g(x_1, \ldots, x_n) p_{j_1 \ldots j_n}$$

санына тең.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамаларының бірлескен $n-$ өлшемді үлестірім тығыздығы $p(x_1, \ldots, x_n)$ болсын. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының мәндер жиынында анықталған n айнымалы $g\,(x_1, \ldots, x_n)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$M g\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

санына тең.