EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 11

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ТАУЕЛСІЗДІГІ. ДИСКРЕТТІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ МЫСАЛДАРЫ

Дәріс құрылымы

- Тәуелсіз кездейсоқ шамалар анықтамасы.
- Кездейсоқ шамалардың тәуелсіз болуының критерийлері.
- Биноминалді үлестірім
- Пуассон үлестірімі
- Геометриялық үлестірім.
- Бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шама.
- Экспоненциалды (көрсеткішті) үлестірілген кездейсоқ шама.
- Нормал немесе Гаусс үлестірімді кездейсоқ шама.
- χ^2 (хи квадрат) – үлестірімі.
- Стьюдент үлестірімі.
- Коши үлестірімі.

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторы берілсін. Егер кез келген $E_1, \ldots, E_n$ борельдік жиындары үшін

$$\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) \in E_1\}, \ldots, \{\omega \in \Omega: \xi_n(\omega) \in E_n\}$$

оқиғалары жаппай тәуелсіз болса, яғни кез келген $1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n \; (2 \le k \le n)$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $i_1, \ldots, i_k$ оң бүтін сандары үшін

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi_{i_1}(\omega) \in E_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}(\omega) \in E_{i_k}\}) = P(\{\omega \in \Omega: \xi_{i_1}(\omega) \in E_{i_1}\}) \cdot \ldots \cdot P(\{\omega \in \Omega: \xi_{i_k}(\omega) \in E_{i_k}\})$$

теңдіктері орындалса, онда $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз кездейсоқ шамалар деп аталады.

Теорема 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1, \ldots, \xi_n$ дискретті кездейсоқ шамалары берілсін. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болу үшін кез келген $a_1, \ldots, a_n$ нақты сандары үшін

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = a_1, \ldots, \xi_n(\omega) = a_n\}) = P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = a_1\}) \cdot \ldots \cdot P(\{\omega \in \Omega: \xi_n(\omega) = a_n\})$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дискретті кездейсоқ шамалардың тәуелсіздігі

Мысал. Екі әділ ойын сүйегі бір-бірінен тәуелсіз лақтырылады.

ξ_2 — екінші сүйектің ұпайы

ξ_1 бірінші сүйектің ұпайы	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	**(2, 5)**	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

36 тең мүмкіндікті нәтиже

$a_1 = 2$ және $a_2 = 5$ болғанда

Көк жол
$P(\xi_1 = 2) = 6/36 = 1/6$

Жасыл бағаң
$P(\xi_2 = 5) = 6/36 = 1/6$

Қиылысу ұяшығы
$P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 5) = 1/36$

$1/36 = (1/6) \cdot (1/6)$

Тәуелсіздік ⇔ кез келген $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ үшін
$P(\xi_1 = a_1, \ldots, \xi_n = a_n) = P(\xi_1 = a_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n = a_n)$

Теорема 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған абсолютті үзіліссіз $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторы берілсін. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болу үшін $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының $F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$ бірлескен үлестірім функциясы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамаларының үлестірім функцияларының көбейтіндісінен тұруы, яғни кез келген $x_1, \ldots, x_n$ нақты сандары үшін

$$F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған абсолютті үзіліссіз $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторы берілсін. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болу үшін $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының $p_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$ бірлескен үлестірім тығыздығы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кездейсоқ шамаларының үлестірім тығыздықтарының көбейтіндісінен тұруы, яғни кез келген $x_1, \ldots, x_n$ нақты сандары үшін

$$p_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(x_n)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Биноминалді үлестірім. (Ω, F, P) ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасы $0,1,\ldots,n$ мәндерін қабылдап, олардың сәйкес ықтималдықтары

$$p_k = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k} \ (k = 0,1,\ldots,n;\ 0 < p < 1, q = 1 - p)$$

болса, яғни

ξ	0	1	…	k	…	n
p_k	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

үлестірім қатары арқылы берілсе, онда **ξ кездейсоқ шамасы биноминалді заң бойынша үлестірілген** деп аталады.

Пуассон үлестірімі. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасы теріс емес $0,1,\ldots,n,\ldots$ бүтін сандарын сәйкесінше

$$p_{k,\lambda} = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ (\lambda > 0;\ k = 0,1,\ldots,n,\ldots)$$

ықтималдықтарымен қабылдаса, яғни

ξ	0	1	2	…	n	…
$p_{k\lambda}$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	…

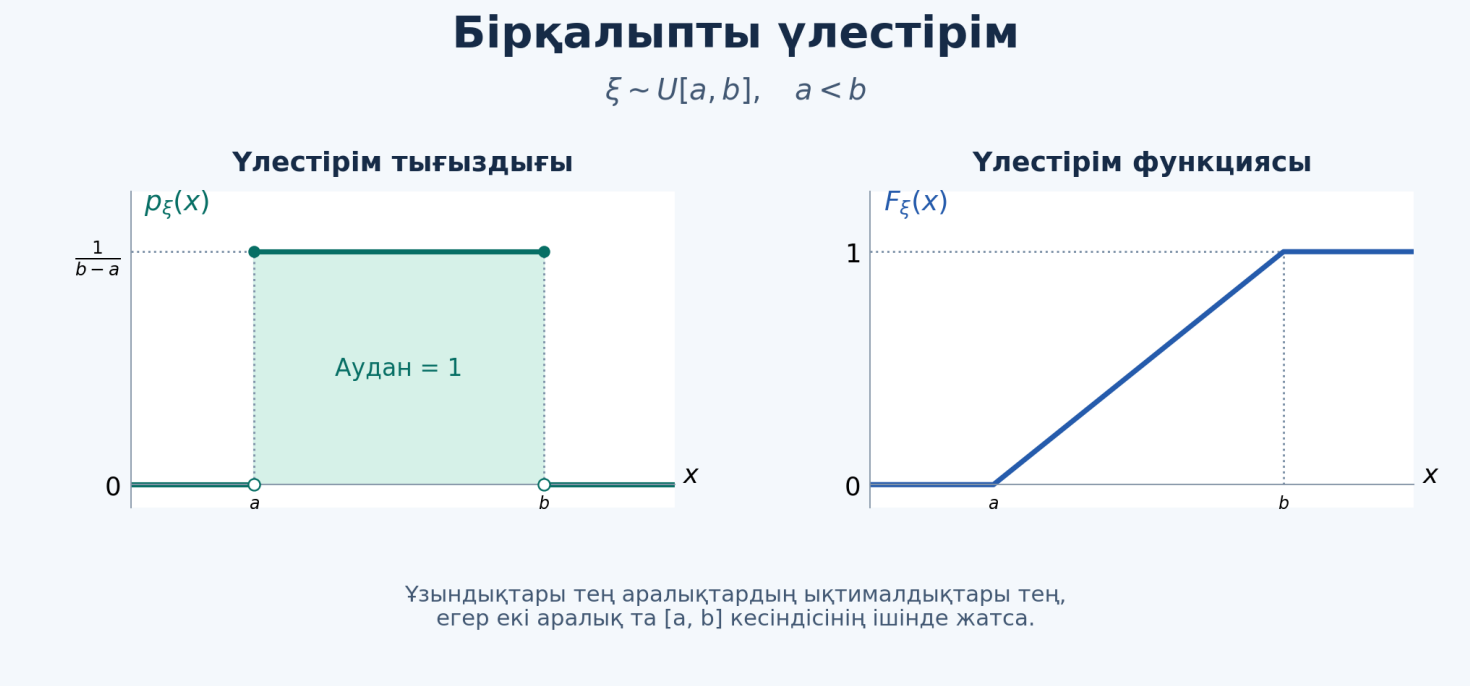
үлестірім қатары арқылы берілсе, онда ξ **кездейсоқ шамасы λ параметрлі Пуассон заңы бойынша үлестірілген** деп аталады.

Бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шама. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған абсолютті үзіліссіз ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы $(a < b;\ a, b \in R)$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{егер } x \in [a, b], \\ 0, \text{егер } x \notin [a, b] \end{cases}$$

болса, онда **ξ кездейсоқ шамасы $[a, b]$ сегментінде бірқалыпты үлестірілген** деп аталады. Оның үлестірім функциясы

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{егер } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{егер } a \le x \le b, \\ 1, \text{егер } x > b. \end{cases}$$



Экспоненциалды (көрсеткішті) үлестірілген кездейсоқ шама. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{егер } x \geq 0, \\ 0, \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

болса, онда **ξ кездейсоқ шамасы экспоненциалды (көрсеткішті) үлестірілген кездейсоқ шама** деп аталады, мұндағы λ – экспоненциалдық көрсеткіші. Оның үлестірім функциясы

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{егер } x \geq 0, \\ 0, \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

Нормал немесе Гаусс үлестірімді кездейсоқ шама. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$p_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0)$$

болса, онда **ξ кездейсоқ шамасы нормал немесе Гаусс заңы бойынша үлестірілген** деп аталады, мұндағы m – математикалық күтім, σ – орташа квадраттық ауытқу деп аталатын кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары (толық анықтамаларымен төменгі XVI-XVII тарауларда танысатындарыңызды ескерте кетейік). Оның үлестірім функциясы

$$F_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \ (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0).$$

$m = 0, \sigma = 1$ болғанда нормал үлестірім **стандартты нормал үлестірім** деп аталып, үлестірім тығыздығы $p_{01}(x) = \varphi(x)$, үлестірім функциясы $F_{01}(x) = \Phi(x)$ арқылы белгілену әдетке айналған (олармен Муавр-Лапластың локалді және интегралдық теоремаларында кездесеміз).

Негізгі әдебиеттер

1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

Назарларыңызға рахмет