11-дәріс

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ ТАУЕЛСІЗДІГІ. ДИСКРЕТТІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ МЫСАЛДАРЫ

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторы берілсін. Егер кез келген $E_1, \dots, E_n$ борельдік жиындары үшін

$$\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) \in E_1\}, \dots, \{\omega \in \Omega: \xi_n(\omega) \in E_n\}$$

оқиғалары жаппай тәуелсіз болса, яғни кез келген $1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n$ $(2 \le k \le n)$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $i_1, \dots, i_k$ оң бүтін сандары үшін

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega: \xi_{i_1}(\omega) \in E_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}(\omega) \in E_{i_k}\right\}\right) =$$
$$= P(\{\omega \in \Omega: \xi_{i_1}(\omega) \in E_{i_1}\}) \cdot \dots \cdot P(\{\omega \in \Omega: \xi_{i_k}(\omega) \in E_{i_k}\})$$

теңдіктері орындалса, онда $\xi_1, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз кездейсоқ шамалар деп аталады.

Теорема 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1, \dots, \xi_n$ дискретті кездейсоқ шамалары берілсін. $\xi_1, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болу үшін кез келген $a_1, \dots, a_n$ нақты сандары үшін

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = a_1, \dots, \xi_n(\omega) = a_n\}) =$$
$$= P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = a_1\}) \cdot \dots \cdot P(\{\omega \in \Omega: \xi_n(\omega) = a_n\})$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған абсолютті үзіліссіз $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторы берілсін. $\xi_1, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болу үшін $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының $F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ бірлескен үлестірім функциясы $\xi_1, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамаларының үлестірім функцияларының көбейтіндісінен тұруы, яғни кез келген $x_1, \dots, x_n$ нақты сандары үшін

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған абсолютті үзіліссіз $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторы берілсін. $\xi_1, \dots, \xi_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болу үшін $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының $p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ бірлескен үлестірім тығыздығы $\xi_1, \dots, \xi_n$кездейсоқ шамаларының үлестірім тығыздықтарының көбейтіндісінен тұруы, яғни кез келген $x_1, \dots, x_n$ нақты сандары үшін

$$p_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(x_n)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Биноминалді үлестірім. (Ω, F, P) ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасы $0,1,\ldots,n$ мәндерін қабылдап, олардың сәйкес ықтималдықтары

$$p_k = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}\ (k = 0,1,\ldots,n;\ 0 < p < 1, q = 1 - p)$$

болса, яғни

ξ	0	1	...	k	...	n
p_k	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

үлестірім қатары арқылы берілсе, онда **ξ кездейсоқ шамасы биноминалді заң бойынша үлестірілген** деп аталады.

Пуассон үлестірімі. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасы теріс емес $0,1,\ldots,n,\ldots$ бүтін сандарын сәйкесінше

$$p_{k,\lambda} = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\ (\lambda > 0;\ k = 0,1,\ldots,n,\ldots)$$

ықтималдықтарымен қабылдаса, яғни

ξ	0	1	2	...	n	...
$p_{k,\lambda}$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	...

үлестірім қатары арқылы берілсе, онда ξ **кездейсоқ шамасы λ параметрлі Пуассон заңы бойынша үлестірілген** деп аталады.

Кейде бұл үлестірім функциясын сирек оқиғалар үлестірімі деп те атайды.

Геометриялық үлестірім. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. ξ кездейсоқ шамасы теріс емес $0,1,\ldots,n,\ldots$ бүтін сандарын сәйкесінше

$$p_k = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = k\}) = q^k p\ (k = 0,1,\ldots,n,\ldots;\ 0 < p \leq 1, q = 1 - p)$$

ықтималдықтарымен қабылдаса, яғни

ξ	0	1	...	n	...
p_k	p	qp	...	$q^n p$	...

үлестірім қатары арқылы берілсе, онда **ξ кездейсоқ шамасы геометриялық заң бойынша үлестірілген** деп аталады.

Бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шама. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған абсолютті үзіліссіз ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы $(a < b;\ a, b \in R)$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{егер } x \in [a, b], \\ 0, \quad \text{егер } x \notin [a, b] \end{cases}$$

болса, онда **ξ кездейсоқ шамасы $[a, b]$ сегментінде бірқалыпты үлестірілген** деп аталады. Оның үлестірім функциясы

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{егер } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \quad \text{егер } a \le x \le b, \\ 1, \text{егер } x > b. \end{cases}$$

Экспоненциалды (көрсеткішті) үлестірілген кездейсоқ шама. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{егер } x \ge 0, \\ 0, \quad \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

болса, онда **ξ кездейсоқ шамасы экспоненциалды (көрсеткішті) үлестірілген кездейсоқ шама** деп аталады, мұндағы λ – экспоненциалдық көрсеткіші. Оның үлестірім функциясы

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{егер } x \ge 0, \\ 0, \quad \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

Нормал немесе Гаусс үлестірімді кездейсоқ шама. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$p_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0)$$

болса, онда **ξ кездейсоқ шамасы нормал немесе Гаусс заңы бойынша үлестірілген** деп аталады, мұндағы m – математикалық күтім, σ – орташа квадраттық ауытқу деп аталатын кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары (толық анықтамаларымен төменгі XVI-XVII тарауларда танысатындарыңызды ескерте кетейік). Оның үлестірім функциясы

$$F_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \ (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0).$$

$m = 0, \sigma = 1$ болғанда нормал үлестірім **стандартты нормал үлестірім** деп аталып, үлестірім тығыздығы $p_{0,1}(x) = \varphi(x)$, үлестірім функциясы $F_{0,1}(x) = \Phi(x)$ арқылы белгілену әдетке айналған (олармен Муавр-Лапластың локалді және интегралдық теоремаларында кездесеміз).

χ^2 (хи квадрат) – үлестірімі. Параметрлер $\gamma = \frac{k}{2}$ (k – тақ сан), $\lambda = \frac{1}{2}$ мәндерін қабылдағанда Гамма үлестірім математикалық статистикадағы маңызы өте зор χ^2 (хи квадрат) – үлестіріміне айналады. k параметрі χ^2 – үлестірімінің еркіндік дәрежесі деп аталады.

Нақтырақ айтқанда, $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тәуелсіз кездейсоқ шамалары стандартты нормал үлестіріммен берілген. Онда $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ кездейсоқ шамасы еркіндік дәрежесі $k = n$ болатын χ^2– үлестірімімен беріледі.
Оның үлестірім тығыздығы

$$p(x) = \begin{cases} 0 \ , \text{егер } x < 0, \\ \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad \text{егер } x \geq 0. \end{cases}$$

Стьюдент үлестірімі. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ тәуелсіз кездейсоқ шамалары стандартты нормал үлестіріммен белілген. Онда

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

үлестірім тығыздығымен берілген $\eta(\omega) = \frac{\xi_0(\omega)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2(\omega)}}$ **кездейсоқ шамасы n еркіндікті Стьюдент үлестірімді** деп аталады.

Коши үлестірімі. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы үзіліссіз болып, үлестірім тығыздығы

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2} \ (-\infty < x_0 < +\infty, \gamma > 0)$$

болса, онда ξ **кездейсоқ шама Коши үлестірімімен берілген** деп, ал $x_0 = 0, \gamma = 1$ жағдайында $p(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2+1)}$ болып, ξ **кездейсоқ шамасы стандартты Коши үлестірімімен берілген** деп аталады.