Дәріс 10

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. КӨП АЙНЫМАЛЫ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР НЕМЕСЕ КЕЗДЕЙСОҚ ВЕКТОРЛАР

Дәріс құрылымы

- Кездейсоқ шамалар. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Үлестірім тығыздығы мен үлестірім функциясы.

- Көп айнымалы кездейсоқ шамалар немесе кездейсоқ векторлар. Дискретті және үзіліссіз көп өлшемді кездейсоқ шамалар. Бірлескен үлестірім тығыздығы мен бірлескенүлестірім функциясы.

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Ω жиынында анықталған нақты мәнді $\xi : \Omega \to R$ өлшемді функциясы, яғни Ω жиынындағы әрбір ω (элементар оқиғаға) элементіне нақты бір санды сәйкес қоятын және кез келген a нақты саны үшін $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > a\} \in \sigma F$ шарты орындалатын ξ ережесі *кездейсоқ шама* деп аталады.



Анықтама 2. ξ кездейсоқ шамасының мәндер жиыны $\Omega_\xi = \xi(\Omega) = \{\xi(\omega): \omega \in \Omega\}$ ақырлы немесе саналымды болса, яғни

$$\sum_i P\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}\right) = 1$$

болатындай $\{x_i\}_i$ сандарының ақырлы немесе саналымды жиыны табылса, онда ξ *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады.

Бірінші жолында кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері x_i, екінші жолында олардың сәйкес ықтималдықтары

$$p_i = P\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}\right) = \sum_{\omega:\omega\in\Omega,\xi(\omega)=x_i} P(\{\omega\})$$

орналасқан дискретті кездейсоқ шаманың *үлестірім қатары* деп аталатын екі жолдық кесте түрінде беру ыңғайлы:

Ω_ξ ақырлы жиын болғанда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары

ξ	x_1	x_2	…	x_m
p_i	p_1	p_2	…	p_m

Ω_ξ саналымды жиын болғанда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары

ξ	x_1	x_2	…	x_m	…
p_i	p_1	p_2	…	p_m	…

Ескерту 1. Дискретті кездейсоқ шаманы $p_i = P\left(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}\right)$ ықтималдықтары үшін $\sum_i p_i = 1$ теңдігінің орындалуы $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ оқиғалардың үйлесімсіздігі мен толық топ құруынан шығады.

Анықтама 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $x \in R$ нақты саны үшін $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ оқиғасының ықтималдылығына тең болатын $F(x)$ функциясы ξ кездейсоқ шамасының *үлестірім функциясы* деп аталады, яғни

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}).$$

Ескерту 2. $F(x) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\})$ мағыналы болуы, яғни $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ оқиға болуы ξ кездейсоқ шамасының өлшемді функция болатындығынан шығады.

Теорема 1. *$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Онда оның $F(x)$ үлестірім функциясы келесі қасиеттерге ие:*

1. *Кез келген x нақты саны үшін $0 \le F(x) \le 1$.*
2. *$F(x)$ кемімейтін функция (кез келген $x_1 < x_2$ нақты сандары үшін $F(x_1) \le F(x_2)$).*
3. $F(-\infty) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) := \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. *Кез келген $x_1 < x_2$ нақты сандары үшін $P(\{\omega \in \Omega : x_1 \le \xi(\omega) < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$.*
5. *$F(x)$ функциясы әр нүктеде сол жақты үзіліссіз, яғни $F(x) = F(x-0) := \lim\limits_{t \to x-0} F(t)$.*

Анықтама 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

түрінде жазуға болатындай теріс емес $p(t)$ функциясы табылса, онда ξ кездейсоқ шамасы *абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шама* деп, ал $p(t)$ функциясы оның *үлестірім тығыздығы* деп аталады.

Теорема 2. *$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамасы берілсін. Онда оның $p(x)$ үлестірім тығыздық функциясы келесі қасиеттерге ие:*

1. Кез келген x үшін $p(x) \geq 0$;
2. $P\left(\{\omega \in \Omega : x_1 \leq \xi(\omega) \leq x_2\}\right) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$;
4. $\Delta x > 0$ үшін $P(\{\omega \in \Omega: x \leq \xi(\omega) \leq x + \Delta x\}) \approx p(x)\Delta x$;
5. $\forall x \in R: P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x\}) = 0$.

Кездейсоқ шамалардың ішінде дискретті де емес, абсолютті үзіліссіз де емес кездейсоқ шамалар бар.

Анықтама 5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамалары берілсін. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ нүктесіндегі мәні $\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}$ оқиғасының ықтималдығына тең болатын

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\})$$

функциясы $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының *бірлескен үлестірім функциясы* деп аталады.

Теорема 3. *Екі өлшемді (ξ, η) кездейсоқ шамасының бірлескен үлестірім функциясы $F(x, y) \equiv F_{(\xi\,\eta)}(x, y)$ келесі қасиеттерге ие:*

1. Кез келген $(x, y) \in R^2$ үшін $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x, y)$ функциясы x, y айнымалыларының әрқайсысы бойынша бір айнымалылы функция ретінде кемімейтін функция.

3. $F(-\infty, y) \equiv \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0, F(x, -\infty) \equiv \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0.$

4. $F(+\infty, +\infty) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1.$

5. Кез келген a_1, a_2, b_1, b_2 нақты сандарыүшін

$$P(\{\omega \in \Omega: a_1 \le \xi(\omega) < b_1, a_2 \le \eta(\omega) < b_2\}) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

6. R^2 жазықтығының әрбір нүктесінде x, y айнымалыларының әрқайсысы бойынша $F(x, y)$ функциясы сол жақты үзіліссіз.

7. $F_{\xi,\eta}(x, +\infty) := F_{\xi(x)}, F_{\xi,\eta}(+\infty, y) := F_\eta(y).$

Анықтама 6. (ξ,η) екі өлшемді кездейсоқ векторында ξ,η кездейсоқ шамаларының әрқайсысы дискретті болса, онда (ξ,η) екі өлшемді кездейсоқ шамасы да *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады.

(ξ,η) кездейсоқ векторының үлестірім қатары

$\xi(\omega)$	$\eta(\omega)$				
	y_1	y_2	…	y_m	$P_{\xi(\omega)}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	$p_{x_1}^{(\xi)}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	$p_{x_2}^{(\xi)}$
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	$p_{x_n}^{(\xi)}$
$P_{\eta(\omega)}$	$p_{y_1}^{(\eta)}$	$p_{y_2}^{(\eta)}$	…	$p_{y_m}^{(\eta)}$	

мұндағы, $p^{(\xi)} = p_{j1} + p_{j2} + \ldots + p_{jm}\,(j = 1,..,n)$ және екінші жағынан $p_{x_j^{(\xi)}} = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_j\})$, яғни бірінші және соңғы бағандар $\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары екендігін көреміз. Дәл сол сияқты кестенің бірінші және соңғы жолдары $\eta(\omega)$ кездейсоқ шамасының үлестіру қатарын береді.

Бұл кесте (ξ,η) дискретті кездейсоқ векторының бірлескен үлестіру қатары деп аталады.

Анықтама 7. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi(\omega), \eta(\omega)$ кездейсоқ векторы берілсін. (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторының

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\})$$

бірлескен үлестірім функциясын,

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(t, z)dz$$

интегралы түрінде жазуға болатындай R^2 жиынында анықталған $p(t, z)$ функциясы табылса, онда (ξ, η) кездейсоқ векторын *абсолютті үзіліссіз* деп, ал $p(t, z)$ функциясын *бірлескен үлестірім тығыздығы* деп атайды.

Теорема 4. *Екі өлшемді* (ξ, η) *кездейсоқ векторының бірлескен үлестірім тығыздығы* $p(x, y)$ *келесі қасиеттерге ие:*

1. *Кез келген* $x, y \in R$ *үшін* $p(x, y) \geq 0$;
2. *Кез келген* a_1, a_2, b_1, b_2 *нақты сандары үшін*

$$P(\{\omega \in \Omega: a_1 \leq \xi(\omega) < b_1, a_2 \leq \eta(\omega) < b_2\}) = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} p(x, y)dy;$$

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dxdy = 1$;
2. $\Delta x > 0, \Delta y > 0$ *үшін*

$$P(\{\omega \in \Omega: x \leq \xi(\omega) < x + \Delta x, y \leq \eta(\omega) < y + \Delta y\}) \approx p(x, y)\Delta x\Delta y;$$

3. *Кез келген* $(x, y) \in R^2$ *үшін* $P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x, \eta(\omega) = y\}) = 0$;
4. $P(\{\omega \in \Omega: (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in D\}) = \iint_D p(x, y)dxdy$, *мұндағы* D *– Лебег бойынша өлшемді жиын;*
5. $p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy$; $p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$.

Негізгі әдебиеттер

1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

Назарларыңызға рахмет