10-дәріс

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР. КӨП АЙНЫМАЛЫ КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР НЕМЕСЕ КЕЗДЕЙСОҚ ВЕКТОРЛАР

Анықтама 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Ω жиынында анықталған нақты мәнді $\xi : \Omega \to R$ өлшемді функциясы, яғни Ω жиынындағы әрбір ω (элементар оқиғаға) элементіне нақты бір санды сәйкес қоятын және кез келген a нақты саны үшін $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > a\} \in \sigma F$ шарты орындалатын ξ ережесі *кездейсоқ шама* деп аталады.

Анықтама 2. ξ кездейсоқ шамасының мәндер жиыны $\Omega_\xi = \xi(\Omega) = \{\xi(\omega): \omega \in \Omega\}$ ақырлы немесе саналымды болса, яғни

$$\sum_i P\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}\right) = 1$$

болатындай $\{x_i\}_i$ сандарының ақырлы немесе саналымды жиыны табылса, онда ξ *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады.

Бірінші жолында кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері x_i, екінші жолында олардың сәйкес ықтималдықтары

$$p_i = P\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}\right) = \sum_{\omega:\omega\in\Omega,\xi(\omega)=x_i} P(\{\omega\})$$

орналасқан дискретті кездейсоқ шаманың *үлестірім қатары* деп аталатын екі жолдық кесте түрінде беру ыңғайлы:

Ω_ξ ақырлы жиын болғанда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары

ξ	x_1	x_2	...	x_m
p_i	p_1	p_2	...	p_m

Ω_ξ саналымды жиын болғанда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары

ξ	x_1	x_2	...	x_m	...
p_i	p_1	p_2	...	p_m	...

Ескерту 1. Дискретті кездейсоқ шаманы $p_i = P\left(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}\right)$ ықтималдықтары үшін $\sum_i p_i = 1$ теңдігінің орындалуы $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ оқиғалардың үйлесімсіздігі мен толық топ құруынан шығады.

Анықтама 3. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $x \in R$ нақты саны үшін $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ оқиғасының ықтималдылығына тең болатын $F(x)$ функциясы ξ кездейсоқ шамасының *үлестірім функциясы* деп аталады, яғни

$$F(x) = P\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}\right).$$

Ескерту 2. $F(x) = P\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}\right)$ мағыналы болуы, яғни $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ оқиға болуы ξ кездейсоқ шамасының өлшемді функция болатындығынан шығады.

Теорема 1. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігінде анықталған* ξ *кездейсоқ шамасы берілсін. Онда оның* $F(x)$ *үлестірім функциясы келесі қасиеттерге ие:*

1. *Кез келген* x *нақты саны үшін* $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ *кемімейтін функция (кез келген* $x_1 < x_2$ *нақты сандары үшін* $F(x_1) \le F(x_2)$).
3. $F(-\infty) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) := \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. *Кез келген* $x_1 < x_2$ *нақты сандары үшін* $P\left(\{\omega \in \Omega : x_1 \le \xi(\omega) < x_2\}\right) = F(x_2) - F(x_1)$.
5. $F(x)$ *функциясы әр нүктеде сол жақты үзіліссіз, яғни* $F(x) = F(x-0) := \lim\limits_{t \to x-0} F(t)$.

Анықтама 4. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

түрінде жазуға болатындай теріс емес $p(t)$ функциясы табылса, онда ξ кездейсоқ шамасы *абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шама* деп, ал $p(t)$ функциясы оның *үлестірім тығыздығы* деп аталады.

Теорема 2. $(\Omega, \sigma F, P)$ *ықтималдық кеңістігінде анықталған* ξ *абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамасы берілсін. Онда оның* $p(x)$ *үлестірім тығыздық функциясы келесі қасиеттерге ие:*

1. Кез келген x үшін $p(x) \ge 0$;
2. $P\left(\{\omega \in \Omega : x_1 \le \xi(\omega) \le x_2\}\right) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$;
4. $\Delta x > 0$ үшін $P(\{\omega \in \Omega: x \le \xi(\omega) \le x + \Delta x\}) \approx p(x)\Delta x$;
5. $\forall x \in R: P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x\}) = 0$.

Кездейсоқ шамалардың ішінде дискретті де емес, абсолютті үзіліссіз де емес кездейсоқ шамалар бар.

Анықтама 5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамалары берілсін. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ нүктесіндегі мәні $\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}$ оқиғасының ықтималдығына тең болатын

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < x_1,\ \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\})$$

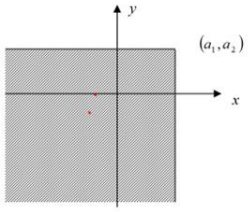
функциясы $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының *бірлескен үлестірім функциясы* деп аталады.

Әрине, $F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы $\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}$ жиыны σ-алгебрада жататын $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ мәндері үшін анықталған.

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді кездейсоқ векторды қарастырсақ, оның үлестірім функциясының геометриялық мағынасы кездейсоқ лақтырылған нүктенің 1 суретте бейнеленген төбесі (a_1, a_2) болатын, қабырғалары координаталар өстеріне параллель

$$F(a_1, a_2) = P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < a_1, \xi_2(\omega) < a_2\})$$

шексіз шаршының төменгі бөлігіне түсуінің ықтималдығы болады.



1 сурет

Теорема 3. *Екі өлшемді* (ξ, η) *кездейсоқ шамасының бірлескен үлестірім функциясы* $F(x, y) \equiv F_{(\xi,\eta)}(x, y)$ *келесі қасиеттерге ие:*

1. *Кез келген* $(x, y) \in R^2$ *үшін* $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $F(x, y)$ *функциясы* x, y *айнымалыларының әрқайсысы бойынша бір айнымалылы функция ретінде кемімейтін функция.*
3. $F(-\infty, y) \equiv \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0, F(x, -\infty) \equiv \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0.$
4. $F(+\infty, +\infty) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1.$
5. *Кез келген* a_1, a_2, b_1, b_2 *нақты сандары үшін*

$$P(\{\omega \in \Omega: a_1 \leq \xi(\omega) < b_1, a_2 \leq \eta(\omega) < b_2\}) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

6. R^2 жазықтығының әрбір нүктесінде x, y айнымалыларының әрқайсысы бойынша $F(x, y)$ функциясы сол жақты үзіліссіз.
7. $F_{\xi,\eta}(x, +\infty) := F_{\xi(x)}, F_{\xi,\eta}(+\infty, y) := F_\eta(y).$

Анықтама 6. (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ векторында ξ, η кездейсоқ шамаларының әрқайсысы дискретті болса, онда (ξ, η) екі өлшемді кездейсоқ шамасы да *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады.

Бір айнымалыдағыдай екі өлшемді кездейсоқ вектордың барлық мүмкін мәндері мен оның ықтималдығын жазу арқылы оны толық сипаттауға болады.

Қарапайымдылық үшін ақырлы кездейсоқ шамамен шектелейік. ξ кездейсоқ шамасы $x_1,\dots,x_n$, η тек $y_1,\dots,y_m$ мәндерін қабылдасын, ал екі өлшемді (ξ,η) кездейсоқ вектордың мәндері $(x_j,y_k)(j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,m)$. (ξ,η) дискретті кездейсоқ векторды бірінші жолына η кездейсоқ шамасының $y_1,\dots,y_m$ мәндерін, сол жақтан бірінші бағанға ξ кездейсоқ шамасының $x_1,\dots,x_n$ мәндерін, екеуінің қиылысқан ұяшығына

$$p_{i,j}=P\left(\left\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_j,\eta(\omega)=y_k\right\}\right)$$

ықтималдығын жазып, кесте құру арқылы беру тиімді (1 кесте).

Кесте 1

(ξ,η) кездейсоқ векторының үлестірім қатары

$\xi(\omega)$	$\eta(\omega)$				
	y_1	y_2	…	y_m	$P_{\xi(\omega)}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	$p_{x_1}^{(\xi)}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	$p_{x_2}^{(\xi)}$
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	$p_{x_n}^{(\xi)}$
$P_{\eta(\omega)}$	$p_{y_1}^{(\eta)}$	$p_{y_2}^{(\eta)}$	…	$p_{y_m}^{(\eta)}$	

мұндағы, $p_{x_j}^{(\xi)}=p_{j1}+p_{j2}+\ldots+p_{jm}\ (j=1,..,n)$ және екінші жағынан $p_{x_j}^{(\xi)}=P\left(\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x_j\}\right)$, яғни бірінші және соңғы бағандар $\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары екендігін көреміз. Дәл сол сияқты кестенің бірінші және соңғы жолдары $\eta(\omega)$ кездейсоқ шамасының үлестіру қатарын береді.

Бұл кесте (ξ,η) дискретті кездейсоқ векторының бірлескен үлестіру қатары деп аталады.

Анықтама 7. $(\Omega,\sigma F,P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi(\omega),\eta(\omega)$ кездейсоқ векторы берілсін. (ξ,η) екі өлшемді кездейсоқ векторының

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=P(\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)<x,\eta(\omega)<y\})$$

бірлескен үлестірім функциясын

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(t,z)dz$$

интегралы түрінде жазуға болатындай R^2 жиынында анықталған $p(t,z)$ функциясы табылса, онда (ξ,η) кездейсоқ векторын *абсолютті үзіліссіз* деп, ал $p(t,z)$ функциясын *бірлескен үлестірім тығыздығы* деп атайды.

$(\Omega,\sigma F,P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған (ξ,η) кездейсоқ векторының бірлескен үлестірім функциясы мен бірлескен үлестірім тығыздығы үшін

$$p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}$$

теңдігі R^2 жиынының барлық нүктелерінде дерлік орындалады, яғни бұл теңдік орындалмайтын нүктелер жиынының Лебег өлшемі нөлге тең.

Дәл осылай, $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,\xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамаларының ортақ n өлшемді үлестірім тығыздығы немесе $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ *кездейсоқ векторының үлестірім тығыздығы* мен олардың бірлескен үлестірім функциясы үшін

$$p(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\dots\partial x_n}$$

теңдігі R^n жиынының барлық нүктелерінде дерлік орындалады.

Екі өлшемді үлестірім тығыздығының қасиеттеріне тоқтала кетейік.

Теорема 4. *Екі өлшемді (ξ,η) кездейсоқ векторының бірлескен үлестірім тығыздығы $p(x,y)$ келесі қасиеттерге ие:*

1. *Кез келген $x,y\in R$ үшін $p(x,y)\geq 0$;*
2. *Кезкелген a_1,a_2,b_1,b_2 нақты сандары үшін*
$$P(\{\omega\in\Omega: a_1\leq\xi(\omega)<b_1, a_2\leq\eta(\omega)<b_2\})=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}p(x,y)dy;$$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$;
4. $\Delta x>0,\Delta y>0$ *үшін*
$$P(\{\omega\in\Omega: x\leq\xi(\omega)<x+\Delta x, y\leq\eta(\omega)<y+\Delta y\})\approx p(x,y)\Delta x\Delta y;$$
5. *Кез келген $(x,y)\in R^2$ үшін $P(\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x,\eta(\omega)=y\})=0$;*
6. $P(\{\omega\in\Omega:(\xi(\omega),\eta(\omega))\in D\})=\iint_D p(x,y)dxdy$, *мұндағы D – Лебег бойынша өлшемді жиын;*
7. $p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$;
8. $p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$.