EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Дәріс 8

ТӘЖІРИБЕЛЕР ТІЗБЕГІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ. БЕРНУЛЛИ СХЕМАСЫ. БЕРНУЛЛИ ЖӘНЕ ПУАССОН ФОРМУЛАЛАРЫ

Дәріс құрылымы

- ✓ Бернулли схемасы
- ✓ Бернулли формуласы
- ✓ Полиномиалды схема - Бернули схемасының жалпылауы
- ✓ Пуассон формуласы

Анықтама 1. Әрқайсысында $p > 0 (0 < p < 1)$ ықтималдықпен ұтыс және $q = 1 - p$ ықтималдықпен ұтылыс болатын, яғни

$$\Omega = \{0,1\}, F = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$$

және

$$P(\{1\}) = p, P(\{0\}) = q, p + q = 1, 0 < p, q < 1$$

шарттарын қанағаттандыратын (Ω, F, P) ықтималдық кеңістіктерімен берілген *n* рет қайталанатын тәуелсіз тәжірибелердің тізбегі *Бернулли схемасы* деп аталады да, оның математикалық моделі

$$(\Omega^n, F^n, P^n)$$

арқылы белгіленеді. Мұндағы

$\Omega^n = \{\omega = (a_1, \ldots, a_n) : a_k \in \{0,1\} (k = 1,2, \ldots, n)\}, F_n = \{A : A \subset \Omega^n\} \setminus$

және

$$P(\{(a_1, \ldots, a_n)\}) = p^{\sum_{k=1}^{n} a_k} q^{n - \sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Бернулли формуласы. Бернулли схемасында n тәжірибе жүргізген кезде дәл $k(k \le n, k = 0,1, \dots)$ рет ұтыс болуын білдіретін оқиғаның орындалуының $P_n(k)$ ықтималдығы

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

формуласымен анықталады. Бұл *Бернулли формуласы* деп аталады.

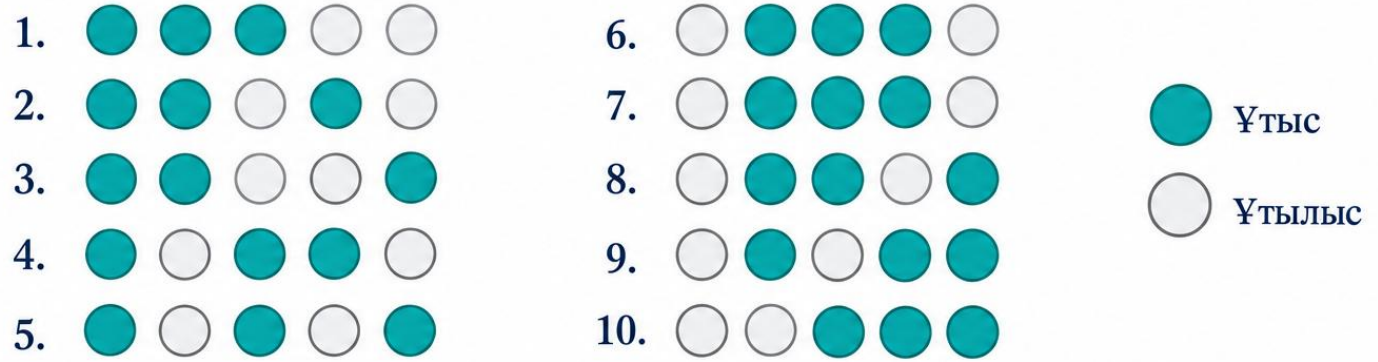
Бернулли формуласы

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n — тәжірибе саны k — ұтыс саны p — ұтыс ықтималдығы q — ұтылыс ықтималдығы

Мысал: $n = 5,\ k = 3$



$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10p^3q^2.$$

Тәжірибелер тәуелсіз, әр тәжірибеде ұтыс ықтималдығы p тұрақты.

$P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ арқылы $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ тәуелсіз тәжірибелер жүргізгенде бірінші нәтиженің n_1 рет, екінші нәтиженің n_2 рет, т.с.с., m нәтиженің n_m рет орындалу ықтималдылығын белгілейік.

Теорема 1 (Полиномиалды схема - Бернули схемасының жалпылауы). *Кез келген оң бүтін n және қосындылары n санына тең теріс емес $n_1, n_2, \ldots, n_m$ сандары үшін*

$$P_{n_1,n_2,\ldots,n_m} = n! \prod_{j=1}^{k} \frac{p_j^{n_j}}{n_j!}$$

теңдігі орындалады.

Полиномиалды схема

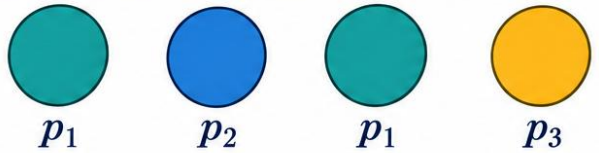
Бернулли схемасының жалпылауы

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m} = n! \prod_{j=1}^{m} \frac{p_j^{n_j}}{n_j!}.$$

$$n_1 + \cdots + n_m = n, \qquad p_1 + \cdots + p_m = 1.$$



Мысал: $n = 4,\ m = 3$



$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 1.$$

Осындай құрамды тізбектер саны: $\frac{4!}{2!1!1!} = 12.$

$$P(2,1,1) = \frac{4!}{2!1!1!} \cdot p_1^2 p_2 p_3 = 12 p_1^2 p_2 p_3.$$

Тәжірибелер тәуелсіз, нәтижелердің ықтималдықтары тұрақты.

Пуассон формуласы. Бернулли схемасында тәжірибиелер саны «көп», ал әрқайсысында оқиғаның орындалу ықтималдығы $p(0 < p < 1)$ «аз», сонымен қатар $\lambda = np$ саны да «аз» болса, Пуассонның жуықтап есептеу формуласын қолданамыз.

Пуассонның жуықтау формуласын алу үшін Бернулли схемаларының серияларын қарастырайық. Мұнда бір серияның ішіндегі оқиғаның орындалу ықтималдығы өзгермегенімен, бір сериядан екіншісіне өткенде сериядағы тәжірибелер санына сәйкес басқа ықтималдыққа ауысады. Бұл $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ықтималдықтар тізбегінің шегі нөлге ұмтылады.

Теорема 2 (Пуассон формуласы). *$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ орындалғанда $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ болатындай $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ тізбегі және теріс емес k бүтін саны берілсін. Онда Бернулли схемасындағы n тәжірибеде p_n ықтималдықпен k ұтыстың орындалу ықтималдығы $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ұмтылады, яғни*

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Теорема 3. A –қандай да бір теріс емес бүтін сандар жиыны, ал $\nu_n - p$ ықтималдықты Бернулли схемасындағы *n* тәжірибедегі ұтыстар саны және $\lambda = np$. Онда

$$\left| P(\nu_n \in A) - \sum_{k\in A} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| = \left| \sum_{k\in A} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k\in A} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| \le np^2$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы $P(\nu_n \in A) = \sum_{k\in A} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Негізгі әдебиеттер

1. Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 214 б.
1. Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы. – Астана: «Булатов А.Ж.» ЖК, 2023. – 187 бет.
2. Темиргалиев Н. Теория вероятностей: электронное издание. – Астана: ИТМиНВ, 2012. – 148 с.
3. Темірғалиев Н., Әубәкір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X–XI кластар. «Жазушы», 2002. – 382 б.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.
5. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. – 160 с.
7. DeGroot Morris H., Schervish Mark J. Probability and statistics. – 4th ed. Mark J. Addison-Wesley, 2010. – 911 p.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х книгах. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. Кн. 1. – 520 с. Кн. 2. – 408 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высш. шк., 1999. – 576 с.

Назарларыңызға рахмет