8-дәріс

ТӘЖІРИБЕЛЕР ТІЗБЕГІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ. БЕРНУЛЛИ СХЕМАСЫ. БЕРНУЛЛИ ЖӘНЕ ПУАССОН ФОРМУЛАЛАРЫ

Бір рет тәжірибе жүргізудің математикалық моделі бір $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі. Сол себепті тәжірибелер тізбегінің математикалық моделі $(\Omega_1, \sigma F_1, P_1)$,..., $(\Omega_n, \sigma F_n, P_n)$ ықтималдық кеңістіктерінің тізбегі болып табылады.

Әрқайсысында нәтижелер саны (элементар оқиғалар) ақырлы болатын ақырлы тәжірибелер тізбегін қарастырайық. Онда сәйкесінше $(\Omega_1, \sigma F_1, P_1)$,..., $(\Omega_n, \sigma F_n, P_n)$ ықтималдық кеңістіктерімен сипатталатын n тәжірибелер тізбегін жүргізудің математикалық моделін $(\bar{\Omega}, \bar{F}, \bar{P})$ арқылы белгілеп, бастапқы n моделдер арқылы өрнектейік

$$\bar{\Omega} = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n = \{\omega = (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}) : \ \omega^{(k)} \in \Omega_k (k = 1, \ldots, n)\},$$

$$\bar{F} = \{A : \ A \subset \bar{\Omega}\},$$

ал элементар оқиғалар жиыны $\bar{\Omega}$ ақырлы болғандықтан (өйткені әрбір $k(k = 1, \ldots, n)$ үшін Ω_k жиындарының әрқайсысы ақырлы) P ықтималдығын құру үшін $\bar{\Omega}$ жиынының бір элементті жиыншаларында $\{\omega\} \mapsto \bar{P}(\{\omega\}) = \bar{P}(\{(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})\})$ теріс емес
функциясын

$$\sum_{\omega \in \bar{\Omega}} \bar{P}(\{\omega\}) = \sum_{(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} \bar{P}(\{(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})\}) = 1$$

теңдігі орындалатындай түрде құрса жеткілікті. Егер тәжірибелер тізбегі тәуелсіз болса, онда оқиғалар тәуелсіздігіне сүйене отырып, P ықтималдығын

$$\bar{P}(\{(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})\}) = \bar{P}(\{\omega^{(1)}\}) \times \ldots \times \bar{P}(\{\omega^{(n)}\})$$

теңдігі бойынша анықтаймыз.

Егер тәжірибелер тізбегі бірдей шарт орындалғанда жүргізілетін болса, яғни

$$\Omega_1 = \cdots = \Omega_n = \Omega,$$

$$F_1 = \cdots = F_n = F,$$

$$P_1 = \cdots = P_n = P,$$

болса, онда тәуелсіз тәжірибелер тізбегінің математикалық моделі (Ω^n, F^n, P^n) арқылы белгіленеді.

Енді бірдей шарт орындалғанда жүргізілетін тәуелсіз тәжірибелер тізбегінің математикалық моделінің *Бернулли схемасы* деп аталатын дербес жағдайына көшейік.

Анықтама 1. Әрқайсысында $p > 0 (0 < p < 1)$ ықтималдықпен ұтыс және $q = 1 - p$ ықтималдықпен ұтылыс болатын, яғни

$$\Omega = \{0,1\}, F = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$$

және

$$P(\{1\}) = p, P(\{0\}) = q, p + q = 1, 0 < p, q < 1$$

шарттарын қанағаттандыратын (Ω, F, P) ықтималдық кеңістіктерімен берілген *n* рет қайталанатын тәуелсіз тәжірибелердің тізбегі *Бернулли схемасы* деп аталады да, оның математикалық моделі

$$(\Omega^n, F^n, P^n)$$

арқылы белгіленеді. Мұндағы

$$\Omega^n = \{\omega = (a_1, \ldots, a_n) : a_k \in \{0,1\} (k = 1,2, \ldots, n)\}, F_n = \{A : A \subset \Omega^n\} \setminus$$

және

$$P(\{(a_1, \ldots, a_n)\}) = p^{\sum_{k=1}^{n} a_k} q^{n - \sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Бернулли формуласы. Бернулли схемасында *n* тәжірибе жүргізген кезде дәл $k (k \leq n, k = 0,1, \ldots)$ рет ұтыс болуын білдіретін оқиғаның орындалуының $P_n(k)$ ықтималдығы

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

формуласымен анықталады. Бұл *Бернулли формуласы* деп аталады.

$P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ арқылы $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ тәуелсіз тәжірибелер жүргізгенде бірінші нәтиженің n_1 рет, екінші нәтиженің n_2 рет, т.с.с., m нәтиженің n_m рет орындалу ықтималдылығын белгілейік.

Теорема 1 (Полиномиалды схема - Бернули схемасының жалпылауы). *Кез келген оң бүтін n және қосындылары n санына тең теріс емес $n_1, n_2, \ldots, n_m$ сандары үшін*

$$P_{n_1,n_2,\ldots,n_m} = n! \prod_{j=1}^{k} \frac{p_j^{n_j}}{n_j!}$$

теңдігі орындалады.

Пуассон формуласы. Бернулли схемасында тәжірибиелер саны «көп», ал әрқайсысында оқиғаның орындалу ықтималдығы $p(0 < p < 1)$ «аз», сонымен қатар $\lambda = np$ саны да «аз» болса, Пуассонның жуықтап есептеу формуласын қолданамыз.

Пуассонның жуықтау формуласын алу үшін Бернулли схемаларының серияларын қарастырайық. Мұнда бір серияның ішіндегі оқиғаның орындалу ықтималдығы өзгермегенімен, бір сериядан екіншісіне өткенде сериядағы тәжірибелер санына сәйкес басқа ықтималдыққа ауысады. Бұл $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ықтималдықтар тізбегінің шегі нөлге ұмтылады.

Теорема 2 (Пуассон формуласы). $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ *орындалғанда* $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ *болатындай* $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *тізбегі және теріс емес k бүтін саны берілсін. Онда Бернулли схемасындағы n тәжірибеде p_n ықтималдықпен k ұтыстың орындалу ықтималдығы* $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ *ұмтылады, яғни*

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Теорема 3. A −қандай да бір теріс емес бүтін сандар жиыны, ал $\nu_n - p$ ықтималдықты Бернулли схемасындағы *n* тәжірибедегі ұтыстар саны және $\lambda = np$. Онда

$$\left| P(\nu_n \in A) - \sum_{k\in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| = \left| \sum_{k\in A} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k\in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \le np^2$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы $P(\nu_n \in A) = \sum_{k\in A} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.