5-дәріс

ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ПРАКТИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ АНЫҚТАМАСЫ

Ықтималдықтың практикалық мағынасы. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Белгілі бір тәжірибе n рет жүргізіліп, оның барысында A оқиғасы дәл n_A рет орындалған болсын. $\frac{n_A}{n}$ саны A оқиғасының *салыстырмалы жиілігі* деп аталады. Тәжірибелер саны n артқан сайын, A оқиғасының салыстырмалы жиілігі $\frac{n_A}{n}$ белгілі бір санның маңайында шоғырланады. Сол сан A оқиғасының ықтималдығы болып табылады. Сонымен, жүргізілген тәжірибелер санын арттырған сайын оқиғаның салыстырмалы жиілігі оқиғанын ықтималдығына жақындай береді.

Бұны көрсету үшін әртүрлі ғалымдар әртүрлі уақытта тәжірибелер санын арттыра отырып, симметриялы тиынды лақтырған, оқырманға ақпарат ретінде соны келтіре кетейік:

Тәжірибе жасаушы	**Тәжірибе саны**	**Таңба түсуінің салыстырмалы жиілігі**
Бюффон (1707-1788) – француз жаратылыстанушысы, биолог, математик	4040	0,507
Де Морган (1806-1871) – шотланд математигі, логик	4090	0,505
Феллер У. (1906-1970) – америка математигі	10000	0,4979
Джевонс (1835-1882)– ағылшын экономисті, философ	20480	0,5068
Пирсон К. (1857-1936) – ағылшын математигі -статистик,	24000	0,5005
Романовский В.И.(1879-1954)–кеңес математигі	80640	0,4933

Мысал 1. Ойын сүйегі кездейсоқ 30 рет лақтырылды. $j(j = 1,2, \dots ,6)$ цифрының түсу саны 6.1 кестесінде келтірілген. Жұп сан түсуінің, 3 цифріне еселі сан түсуінің салыстырмалы жиілігін анықтаңыз.

Кесте 1

ω	1	2	3	4	5	6
n_ω	7	3	6	5	6	3

Шешуі. Алдымен элементар оқиғалар жиынын құрайық

$$\Omega = \{\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6\}.$$

A оқиғасы жұп сан түсуін білдірсе, B оқиғасы 3 цифріне еселі сан түсуін білдірсін, онда

$$A=\{\omega_2 = 2, \omega_4 = 4, \omega_6 = 6\} \text{ және } B=\{\omega_3 = 3, \omega_6 = 6\}.$$

Демек, A оқиғасы оқиға орындалуының анықтамасы бойынша 2,4,6 сандары түскенде орындалып, ал 1,3,5 сандары түскен кезде орындалмайды, сол сияқты B оқиғасы 3,6 сандары түскен кезде ғана орындалып, 1,2,4,5 сандары түскен кезде орындалмайды. Демек, оқиғалардың сәйкесінше салыстырмалы жиіліктері

$$r_A = \frac{n_A}{n} = \frac{3+5+3}{30} = \frac{11}{30} \approx 0{,}367$$

және

$$r_B = \frac{n_B}{n} = \frac{6+3}{30} = \frac{9}{30} \approx 0{,}3.$$

1 кестесіне оралсақ, ойын сүйегін 30 рет лақтырғанда 1 цифрі 7 рет, 2 цифрі 3 рет және т.с.с. 6 цифрі 3 рет түсуінің барлық мүмкін жағдайлары

$$P_{30}(7,3,6,5,7,3) = \frac{30!}{7!\,3!\,6!\,5!\,7!\,3!}.$$

Осылардың ішінен біреуін келтіріп, A оқиғасының орындалуын (+), орындалмауын (-) таңбасымен белгілеп, әрбір тәжірибе нәтижесін ажыратайық. 6.2-кестенің бірінші жолында тәжірибе нәтижелері көрсетілсе, екінші жолында сәйкесінше A оқиғасының орындалу немесе орындалмауы көрсетілген. Мысалы, тәжірибені бірінші рет орындағанда 1 цифрі түсіп, $1 \notin A$ болғандықтан A оқиғасы орындалмады, ал төртінші рет орындағанда 2 цифрі түсіп, ол жұп болғандықтан элементар оқиға ретінде A оқиғасында жатады да, оның орындалуын қамтамасыз етеді.

Кесте 2

1	4	3	2	5	5	1	2	1	3	5	5	3	4	4
-	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+
3	4	5	5	3	1	4	6	3	1	2	6	1	6	1
-	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-

Егер A оқиғасының ықтималдығын классикалық анықтаманы қолданып, есептейтін болсақ $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$. Ал салыстырмалы жиілігі $0{,}367$. Бұл мысалдан салыстырмалы жиілік ықтималдылықтан айтарлықтай кіші болғанмен тәжірибелер санын неғұрлым арттырған сайын оқиға жиілігі оқиға ықтималдығына жақындайтындығы үлкен сандар заңы бойынша дәлелденеді.

Анықтама 2 (*Ықтималдықтың геометриялық анықтамасы*). Лебег өлшемі ақырлы оң болатын Ω элементар оқиғалар жиыны мен оның Лебег бойынша өлшенетін жиыншаларынан құралған σ -алгебрасы σF берілсін. $A \in \sigma F$ оқиғасы үшін

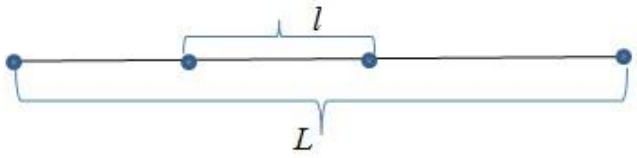
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \qquad (1)$$

саны A оқиғасының *ықтималдығы* деп аталады, мұндағы $\mu(A) - A$ жиынының Лебег өлшемі.

Мысал 2. Ұзындығы l кесінді ұзындығы L санына тең кесіндінің ішінде орналассын (1 сурет). Ұзындығы L санына тең кесіндіге лақтырылған нүкте ұзындығы l санына тең кесіндіге түсу оқиғасының ықтималдығын анықтаңыз.

Шешуі. Жоғарыда айтып өткеніміздей, нақты анализ курсы бойынша кесіндінің өлшемі оның ұзындығына тең, онда (1) формуласы бойынша

$$P(A) = \frac{l}{L}$$



1-сурет

Кесінді тәрізді шеңбер, доға және т.с.с. ұзындығы ақырлы болатын қисықтардың өлшемі олардың ұзындықтары болады.