Дәріс 2

# ЖИЫНДАР ЖҮЙЕСІ. ЖИЫНДАР ФУНКЦИЯСЫ. ӨЛШЕМ

# Дәріс құрылымы

- ✓ Жиындар жүйесі
- ✓ Алгебра, $\sigma$- алгебра
- ✓ Жиындар функциясы
- ✓ Өлшем

***Анықтама 1.*** Элементтері жиын болатын бос емес жиын *жиындар жүйесі* деп аталады.

***Анықтама 2.*** Егер $S$ жиындар жүйесінде жататын кез келген $A$ және $B$ жиындары үшін олардың $A \cup B$ бірігуі де ($A \cap B$ қиылысуы да, $A \backslash B$ айырымы да) $S$ жиындар жүйесінде жатса, онда $S$ жиындар жүйесі *бірігу (қиылысу, айырма) амалына қарағанда тұйық* деп аталады.

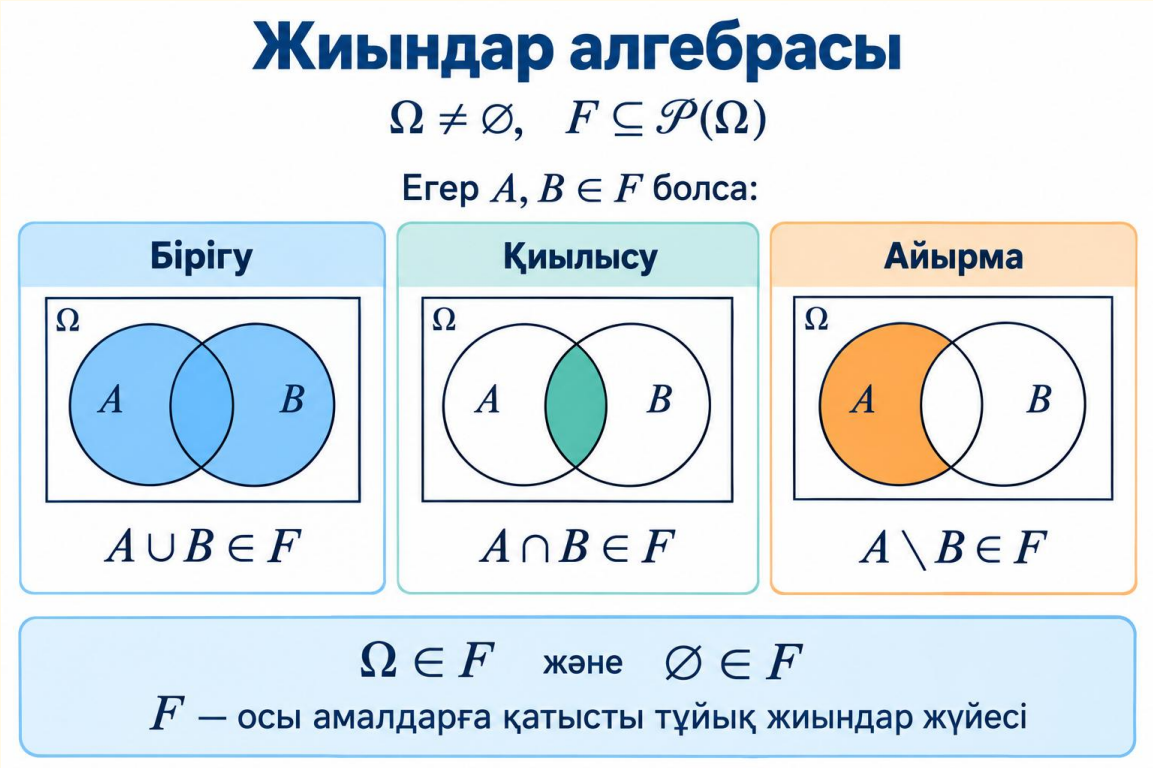
***Анықтама 3.*** $\Omega$ бос емес жиыны берілсін. Бірігу, қиылысу, айырма амалдарының ақырлы санына қарағанда тұйық және $\Omega$ жиынының өзін де қамтитын $\Omega$ жиынының жиыншаларынан құралған $F$ жиындар жүйесі *алгебра* деп аталады.

***Теорема 1.*** *$\Omega$ бос емес жиыны берілсін. $\Omega$ жиынының жиыншаларынан құралған F жиындар жүйесі бірлік элементі $\Omega$ болатын алгебра болуы үшін төмендегі үш шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:*

***1-шарт****: $\emptyset \in \mathrm{F}$,*

***2-шарт****: Егер $A \in F$, онда $\bar{A} = \Omega \backslash A \in F$,*

***3-шарт****: Егер $A \in F, B \in F$, онда $A \cup B \in F$.*




***Анықтама 4***. Ω бос емес жиыны берілсін. Бірігу, қиылысу, айырма амалдарының ақырлы және саналымды санына қарағанда тұйық және Ω жиынын қамтитын Ω жиынының жиыншаларынан құралған *σF* жиындар жүйесі *σ-алгебра* деп аталады.

***Теорема 2***. *$\Omega$ бос емес жиыны берілсін. $\Omega$ жиынының жиыншаларынан құралған $\sigma A$ жиындар жүйесі бірлік элементті $\Omega$ болатын $\sigma F$-алгебра болуы үшін төмендегі үш шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:*

***1*-шарт*:** $\emptyset \in \sigma F$,

***2*-шарт:*** *Егер* : $A \in \sigma F$, *онда* $\bar{A} = \Omega \backslash A \in \sigma F$,

***3*-шарт:*** *Егер* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \sigma F$, *онда* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma F$

***Анықтама 5.*** $R^1$ – жиынындағы барлық шенелген интервалдарды қамтитын ең кіші сигма алгебра *Борельдік $\sigma$-алгебра* деп аталып, $\sigma B(R)$ арқылы белгіленеді.

***Анықтама 6.*** Анықталу жиыны жиындар жүйесі болатын функция *жиындар функциясы* деп аталады.

***Анықтама 7.*** $S$ жиындар жүйесінде анықталған нақты мәнді Ф жиындар функциясы берілсін. Егер $S$ жиындар жүйесінде жататын кез келген өзара қиылыспайтын $E_1, E_2, \dots, E_n$ жиындары үшін олардың бірігуі $\sum_{k=1}^{n} E_k$ жиыны да $S$ жиындар жүйесінде жатып және

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(E_k)$$

теңдігі орындалса, онда Ф жиындар функциясы *ақырлы-аддитивті функция* деп аталады.

***Анықтама 8.*** $S$ жиындар жүйесінде анықталған нақты мәнді Ф жиындар функциясы берілсін. Егер $S$ жиындар жүйесінде жататын кез келген өзара қиылыспайтын $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ жиындары үшін олардың бірігуі $\sum_{k=1}^{\infty} E_k$ жиыны да S жиындар жүйесінде жатса және

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k)$$

теңдігі орындалса, онда $S$ жиындар жүйесінде анықталған Ф жиындар функциясы *σ-аддитивті функция* деп аталады.

***Анықтама 9.*** $\Omega$ бос емес жиыны мен оның жиыншаларынан құралған $\sigma F$ $\sigma$-алгебрасы берілсін. $\sigma F$ сигма алгебрасында анықталған, теріс емес, $\sigma$-аддитивті функция *өлшем* деп аталады. Әдетте, өлшемді $\mu$ әрпімен белгілейді, сонда өлшем $\mu: \sigma F \mapsto [0, +\infty]$ келесі шарттарды қанағаттандыратын функция:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\forall A \in \sigma F: \ \mu(A) \geq 0$,
3. $\sigma F$ $\sigma$ -алгебрасында жататын кез келген өзара қиылыспайтын $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ жиындары үшін келесі теңдігі орындалады

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

# Негізгі әдебиеттер


1. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 7-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 560 с.
2. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П. Л. Ульянов. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.

# Назарларыңызға рахмет