2-ДӘРІС

ЖИЫНДАР ЖҮЙЕСІ. АЛГЕБРА, σ- АЛГЕБРА. ЖИЫНДАР ФУНКЦИЯСЫ. ӨЛШЕМ

Анықтама 1. Элементтері жиын болатын бос емес жиын *жиындар жүйесі* деп аталады.

Анықтама 2. Егер S жиындар жүйесінде жататын кез келген A және B жиындары үшін олардың $A \cup B$ бірігуі де ($A \cap B$ қиылысуы да, $A \backslash B$ айырымы да) S жиындар жүйесінде жатса, онда S жиындар жүйесі *бірігу (қиылысу, айырма) амалына қарағанда тұйық* деп аталады.

Анықтама 3. Ω бос емес жиыны берілсін. Бірігу, қиылысу, айырма амалдарының ақырлы санына қарағанда тұйық және Ω жиынының өзін де қамтитын Ω жиынының жиыншаларынан құралған F жиындар жүйесі *алгебра* деп аталады.

Теорема 1. *Ω бос емес жиыны берілсін. Ω жиынының жиыншаларынан құралған F жиындар жүйесі бірлік элементі Ω болатын алгебра болуы үшін төмендегі үш шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:*

1-шарт*: $\emptyset \in$ F,*

2-шарт*: Егер $A \in F$, онда $\bar{A} = \Omega \backslash A \in F$,*

3-шарт*: Егер $A \in F, B \in F$, онда $A \cup B \in F$.*

Анықтама 4. Ω бос емес жиыны берілсін. Бірігу, қиылысу, айырма амалдарының ақырлы және саналымды санына қарағанда тұйық және Ω жиынын қамтитын Ω жиынының жиыншаларынан құралған σF жиындар жүйесі *σ-алгебра* деп аталады.

Теорема 2. *Ω бос емес жиыны берілсін. Ω жиынының жиыншаларынан құралған σA жиындар жүйесі бірлік элементі Ω болатын σF-алгебра болуы үшін төмендегі үш шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті:*

***1*-шарт*: $\emptyset \in \sigma F$,**

2*-шарт: *Егер* : $A \in \sigma F$, *онда* $\bar{A} = \Omega \backslash A \in \sigma F$,

3*-шарт: *Егер* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \sigma F$, *онда* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma F$

Анықтама 5. R^1 – жиынындағы барлық шенелген интервалдарды қамтитын ең кіші сигма алгебра *Борельдік σ-алгебра* деп аталып, $\sigma B(R)$ арқылы белгіленеді.

Анықтама 6. Анықталу жиыны жиындар жүйесі болатын функция *жиындар функциясы* деп аталады.

Анықтама 7. S жиындар жүйесінде анықталған нақты мәнді Ф жиындар функциясы берілсін. Егер S жиындар жүйесінде жататын кез келген өзара қиылыспайтын $E_1, E_2, \dots, E_n$ жиындары үшін олардың бірігуі $\sum_{k=1}^{n} E_k$ жиыны да S жиындар жүйесінде жатып және

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(E_k)$$

теңдігі орындалса, онда Ф жиындар функциясы *ақырлы-аддитивті функция* деп аталады.

Анықтама 8. S жиындар жүйесінде анықталған нақты мәнді Ф жиындар функциясы берілсін. Егер S жиындар жүйесінде жататын кез келген өзара қиылыспайтын $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ жиындары үшін олардың бірігуі $\sum_{k=1}^{\infty} E_k$ жиыны да S жиындар жүйесінде жатса және

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k)$$

теңдігі орындалса, онда S жиындар жүйесінде анықталған Ф жиындар функциясы σ*-аддитивті функция* деп аталады.

Анықтама 9. Ω бос емес жиыны мен оның жиыншаларынан құралған σF σ-алгебрасы берілсін. σF сигма алгебрасында анықталған, теріс емес, σ-аддитивті функция *өлшем* деп аталады. Әдетте, өлшемді μ әрпімен белгілейді, сонда өлшем $\mu: \sigma F \mapsto [0, +\infty]$ келесі шарттарды қанағаттандыратын функция:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\forall A \in \sigma F: \ \mu(A) \geq 0$,
3. σF σ -алгебрасында жататын кез келген өзара қиылыспайтын $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ жиындары үшін келесі теңдігі орындалады

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Анықтама 10. G ашық жиыны берілсін. G жиынын құрайтын интервалдардың ұзындықтарының қосындысы G жиынының *өлшемі* деп аталады, яғни (3.1) шарттарын қанағаттандыратын $\{(a_k, b_k)\}_{k \in T}$ интервалдары үшін

$m(G) = \sum_{k \in T} (b_k - a_k)$.

Анықтама 11. $E \subset R^1$ шенелген жиыны берілсін. E жиынын қамтитын ашық жиындардың өлшемдерінің инфимумы E жиынының *сыртқы өлшемі* деп аталады да, $\mu^*(E)$ арқылы белгіленеді, яғни

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset J} m(J).$$

Анықтама 12. $F \subset [a, b]$ тұйық жиыны берілсін

$$m(F) = b - a - m\left(C_{[a,b]} F\right)$$

саны F жиынының *өлшемі* деп аталады. Мұндағы $C_{[a,b]} F$ жиыны F жиынының (a, b) жиынына дейінгі толықтауышы (бұл ашық жиын болады).

Анықтама 13. $E \subset R^1$ шенелген жиыны берілсін. E жиынының ішінде жататын тұйық жиындардың өлшемдерінің супремумы E жиынының *ішкі өлшемі* деп аталады да, $\mu_*(E)$ түрінде белгіленеді, яғни

$$\mu_*(E) = \sup_{F \subset E} m(F).$$

Анықтама 14. $E \subset R^1$ шенелген жиыны берілсін. Егер E жиынының ішкі және сыртқы өлшемдері тең болса, онда E жиыны *Лебег бойынша өлшемді жиын*, ішкі және сыртқы өлшемдердің ортақ мәні E жиынының *Лебег өлшемі* деп аталып, $\mu(E)$ түрінде белгіленеді.

Сыртқы және ішкі өлшемдер өзара тең болмаған жағдайда (нақтырақ айтқанда ішкі өлшем сыртқы өлшемнен кіші болған жағдайда) жиын *өлшемсіз* деп аталады.