

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылусыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Күшті азғындалған идеал электрондық газ

Күшті азғындалу кезіндегі бірдей фермиондардың идеал газы.

Шарты. Үшөлшемді идеал электрондық газдың концентрациясы $n = 8.50 \times 10^{28} \text{ м}^{-3}$, температурасы $T = 300 \text{ К}$. Электронның массасы $m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \text{ кг}$, спиндік еселік $g = 2$. Ферми толқын санын, Ферми энергиясын, Ферми температурасын, нөлдік температурадағы қысымды және $C_V/(Nk_B)$ қатынасын табыңыз. Күшті азғындалу және релятивистік емес жуықтауларды тексеріңіз.

Модель. $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / (2m_e)$; өзара әсерлесу мен тор әсері ескерілмейді. Қысым $T = 0$ шегінде, C_V төмен температураның жетекші жуықтауында есептеледі.

1. Ферми сферасындағы күйлерді санау. Бір k күйінің көлемі $(2\pi)^3/V$. Екі спиндік күйді ескерсек,

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3}, \quad k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = 1.36023 \times 10^{10} \text{ м}^{-1}.$$

2. Энергия мен температура.

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = 1.12943 \times 10^{-18} \text{ Дж} = 7.049 \text{ эВ},$$
$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = 8.1804 \times 10^4 \text{ К}, \quad \frac{T}{T_F} = 3.6673 \times 10^{-3} \ll 1.$$

Газ күшті азғындалған. Ферми жылдамдығы $v_F = \hbar k_F / m_e = 1.575 \times 10^6 \text{ м/с}$; $v_F/c = 0.00525 \ll 1$, сондықтан релятивистік емес модель жарамды.

3. Нөлдік температурадағы қысым. Үшөлшемді күйлер тығыздығы $D(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$ болғандықтан,

$$N = \int_0^{E_F} D(\varepsilon) d\varepsilon, \quad U_0 = \int_0^{E_F} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Интегралдау нәтижелерінің қатынасы $U_0/N = [(2/5)E_F^{5/2}]/[(2/3)E_F^{3/2}] = 3E_F/5$.

Релятивистік емес еркін газ үшін $p_0 = 2U_0/(3V)$:

$$p_0 = \frac{2}{5} n E_F = 3.8401 \times 10^{10} \text{ Па} = 38.40 \text{ ГПа}.$$

4. Төмен температурадағы жылу сыйымдылық. Бөлшек саны мен көлем тұрақты болғанда Зоммерфельд жіктеуі:

$$U \simeq \frac{3}{5} N E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right].$$

Температура бойынша туынды алып,

$$\frac{C_V}{Nk_B} \simeq \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} = 0.01810.$$

Жауабы. $k_F = 1.360 \times 10^{10} \text{ м}^{-1}$; $E_F = 7.049 \text{ эВ}$; $T_F = 8.180 \times 10^4 \text{ К}$; $p_0 = 38.40 \text{ ГПа}$; $C_V/(Nk_B) \simeq 0.01810$.

Түсіндіру. Паули принципіне байланысты қысым $T = 0$ кезінде де сақталады. Жылулық қозуға Ферми бетіне жақын электрондар қатысатындықтан, C_V классикалық $3Nk_B/2$ мәнінен аз. Мұндағы қысым — идеал электрондық газдың үлесі; нақты металдың толық қысымы бөлек есептеледі.