

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылу сыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Ферми Дирак Бозе Эйнштейн және Максвелл Больцман таралулары

Фермиондар мен бозондар статистикасы. Үш таралуды салыстыру.

Шарты. Энергиясы ε болатын деңгейде $g = 4$ тәуелсіз бірбөлшектік күй бар. Жүйе үлкен канондық ансамбльмен сипатталады және $(\varepsilon - \mu)/(k_B T) = \ln 3$. Ферми–Дирак, Бозе–Эйнштейн және Максвелл–Больцман таралулары бойынша бір күйдің орташа толуын, бүкіл деңгейдегі орташа бөлшек санын және оның дисперсиясын табыңыз. Классикалық жуықтаудың дәлдігін бағалаңыз.

1. Бір күйге қатысты қосындылар. $q = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} = 1/3$ деп белгілейміз. Фермион үшін $n = 0, 1$, бозон үшін $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\mathcal{E}_F = 1 + q, \quad \mathcal{E}_B = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Бозондық қатар $q < 1$ кезінде жинақталады; берілген күй бұл шартты қанағаттандырады.

2. Орташа толтыруларды шығару. $\langle n \rangle = q \partial \ln \mathcal{E} / \partial q$ формуласынан

$$\langle n \rangle_F = \frac{q}{1+q} = \frac{1}{4}, \quad \langle n \rangle_B = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{2}, \quad \langle n \rangle_{MB} = q = \frac{1}{3}.$$

Соңғы өрнек — $q \ll 1$ кезіндегі классикалық шек.

3. Дисперсияларды табу. Үлкен канондық ансамбльде бір күй үшін $\text{Var}(n) = q \partial \langle n \rangle / \partial q$. Сондықтан

$$\text{Var}_F(n) = \langle n \rangle_F (1 - \langle n \rangle_F), \quad \text{Var}_B(n) = \langle n \rangle_B (1 + \langle n \rangle_B).$$

Максвелл–Больцман шегінде толтыру Пуассон заңына сәйкес: $\text{Var}_{MB}(n) = \langle n \rangle_{MB}$. Тәуелсіз g күй үшін орташа мән мен дисперсия g есеге көбейеді.

Статистика	Бір күйдегі $\langle n \rangle$	Деңгейдегі $\langle N_\varepsilon \rangle$	$\text{Var}(N_\varepsilon)$
Ферми–Дирак	1/4	1	3/4
Бозе–Эйнштейн	1/2	2	3
Максвелл–Больцман	1/3	4/3	4/3

4. Классикалық жуықтауды бағалау. Максвелл–Больцман мәні фермиондық орташа мәннен 33.3% артық, бозондық мәннен 33.3% кем. Сондықтан $q = 1/3$ кезінде классикалық жуықтау дәл емес. $q \ll 1$ болса, үш таралу да $\langle n \rangle \simeq q$ шегіне ұмтылады.

Жауабы. Деңгейдегі орташа бөлшек сандары тиісінше 1, 2, 4/3; дисперсиялары 3/4, 3, 4/3.

Түсіндіру. Фермиондарда Паули принципі флуктуацияны азайтады, бозондарда бір күйді бірлесіп толтыру оны арттырады. «Бір күйде ең көбі бір фермион» деген ереже төрт күйден тұратын бүкіл деңгейде ең көбі бір бөлшек болады дегенді білдірмейді: бұл деңгейдің сыйымдылығы — төрт фермион.