

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылу сыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Бірдей бөлшектерді кванттық санау

Бірдей бөлшектердің идеал кванттық газдары.

Шарты. Өзара әсерлеспейтін екі бірдей бөлшек үш еселенбеген бірбөлшектік орбитальды толтыра алады. Орбиталь энергиялары $0, \Delta, 2\Delta$. $\beta\Delta = \ln 2$. Жүйені екі жағдайда салыстырыңыз: спинсіз бозондар және спиндері бір бағытқа толық полярланған фермиондар. Рұқсат етілген толтыру сандарын, канондық статистикалық қосындыны және орташа толық энергияны табыңыз.

Модель. Бөлшек саны дәл $N = 2$. Орбитальдар толтыру сандарымен (n_0, n_1, n_2) сипатталады. Бозондар үшін $n_i = 0, 1, 2, \dots$, фермиондар үшін Паули принципіне сәйкес $n_i = 0$ немесе 1 .

1. Көпбөлшектік күйлерді санау. $n_0 + n_1 + n_2 = 2$ және $E = \Delta(n_1 + 2n_2)$.

Толтыру сандары	E/Δ	Бозондар	Фермиондар
(2,0,0)	0	Рұқсат	Тыйым
(1,1,0)	1	Рұқсат	Рұқсат
(1,0,1)	2	Рұқсат	Рұқсат
(0,2,0)	2	Рұқсат	Тыйым
(0,1,1)	3	Рұқсат	Рұқсат
(0,0,2)	4	Рұқсат	Тыйым

2. Статистикалық қосындылар. $x = e^{-\beta\Delta} = 1/2$ болса,

$$Z_B = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4 = \frac{35}{16}, \quad Z_F = x + x^2 + x^3 = \frac{7}{8}.$$

Бозондардағы $2x^2$ мүшесі энергиялары бірдей екі әртүрлі көпбөлшектік күйден пайда болады.

3. Орташа энергияларды есептеу. $P_s = e^{-\beta E_s}/Z$ және $U = \sum_s E_s P_s$:

$$\frac{U_B}{\Delta} = \frac{x + 4x^2 + 3x^3 + 4x^4}{Z_B} = \frac{34}{35} = 0.97143,$$

$$\frac{U_F}{\Delta} = \frac{x + 2x^2 + 3x^3}{Z_F} = \frac{11}{7} = 1.57143.$$

Жауабы. Бозондар үшін 6 күй, $Z_B = 35/16$, $U_B = 34\Delta/35$; фермиондар үшін 3 күй, $Z_F = 7/8$, $U_F = 11\Delta/7$.

Тексеру және түсіндіру. $T \rightarrow 0$ кезінде бозондардың екі бөлшегі де төменгі орбитальға орналасып, $U_B \rightarrow 0$; фермиондар әртүрлі орбитальдарды толтырып, $U_F \rightarrow \Delta$. Толтыру сандары арқылы санағанда бірдей бөлшектерді алмастыру жаңа күй туғызбайды, сондықтан қосымша $2!$ бөлгіші енгізілмейді. Энергия айырмасы өзара әсерлесуден емес, кванттық күйлерді толтыру ережелерінен шығады.