

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылусыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Газдардың статистикалық қосындысы және жылусыйымдылығы

Біратомды идеал газды кванттық канондық әдіспен сипаттау. Көпатомды газдың жылусыйымдылығы.

Шарты. Екі бөлек ыдыстың әрқайсысында $T = 300 \text{ K}$, $V = 0.0240 \text{ m}^3$ жағдайында бір моль идеал газ бар. Біріншісі — атом массасы $m = 6.64 \times 10^{-26} \text{ kg}$ біратомды газ; оның ішкі күйі еселенбеген. Екіншісі — әртүрлі екі атомнан тұратын сызықтық молекулалы газ: айналыс күйлері классикалық режимде, ал тербелістік температурасы $\theta_v \geq 3000 \text{ K}$. Бірінші газдың жылулық толқын ұзындығын және классикалық жуықтаудың шартын тексеріңіз; статистикалық қосындыдан қысым, энергия және $C_{V,m}$ табыңыз. Екінші газдың $C_{V,m}$, $C_{p,m}$ және γ шамаларын анықтаңыз.

1. Бір атомның кванттық күйлерін санау. Үлкен ыдыста импульс деңгейлерінің аралығы аз. Қосындыны интегралмен алмастырамыз:

$$z_1 = \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta p^2/(2m)} d^3p = \frac{V}{\lambda_T^3}, \quad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

$\lambda_T = 1.594 \times 10^{-11} \text{ m}$. $n = N_A/V = 2.509 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ болғандықтан,

$$n\lambda_T^3 = 1.016 \times 10^{-7} \ll 1.$$

Газ азғындалмаған; кванттық алмасу түзетулерін елемеуге болады.

2. Канондық қосынды мен термодинамикалық шамалар. Бірдей бөлшектердің қайталанып саналуын алып тастаймыз:

$$Z_N \simeq \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N.$$

Бұл — кванттық канондық сипаттаудың сиретілген газ шегі. $\ln Z_N$ көлемге $N \ln V$, температураға $3N \ln T/2$ арқылы тәуелді. Сондықтан

$$p = k_B T \left(\frac{\partial \ln Z_N}{\partial V} \right)_{T,N} = \frac{N k_B T}{V} = 103.93 \text{ kPa},$$

$$U = - \left(\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} \right)_{V,N} = \frac{3}{2} N k_B T = 3741.51 \text{ J}, \quad C_{V,m} = \frac{3}{2} R = 12.4717 \text{ J/(mol K)}.$$

3. Екіатомды газдың ішкі еркіндік дәрежелерін қосу. Ілгерілемелі қозғалыс $3R/2$, кеңістіктегі сызықтық молекуланың екі айналыс еркіндік дәрежесі R үлес береді. Электрондық және тербелістік қозулар ескерілмейді:

$$C_{V,m} \simeq \frac{5}{2} R = 20.7862 \text{ J/(mol K)}, \quad C_{p,m} = C_{V,m} + R \simeq \frac{7}{2} R = 29.1006 \text{ J/(mol K)}, \quad \gamma \simeq \frac{7}{5} = 1.40.$$

4. Тербелісті елемеуді бағалау. $x = \theta_v/T \geq 10$ кезінде бір тербеліс модасының үлесі $C_{V,m}^{(v)} = R x^2 e^x / (e^x - 1)^2 \leq 0.0378 \text{ J/(mol K)}$. Бұл $5R/2$ мәнінің 0.182%-ынан аз.

Жауабы. Біратомды газ үшін $\lambda_T = 1.594 \times 10^{-11} \text{ m}$, $p = 103.9 \text{ kPa}$, $U = 3.742 \text{ kJ}$, $C_{V,m} = 12.47 \text{ J/(mol K)}$. Екіатомды газ үшін $C_{V,m} \simeq 20.79$, $C_{p,m} \simeq 29.10 \text{ J/(mol K)}$, $\gamma \simeq 1.40$.

Түсіндіру. Бірдей v, T, V жағдайында екі идеал газдың қысымы бірдей, ал жылусыйымдылықтары ішкі еркіндік дәрежелеріне байланысты әртүрлі. Барлық көпатомды газға $5R/2$ мәнін қолдануға болмайды: бұл нәтиже осы есептегі сызықтық екіатомды молекула моделіне қатысты.

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылусыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Бірдей бөлшектерді кванттық санау

Бірдей бөлшектердің идеал кванттық газдары.

Шарты. Өзара әсерлеспейтін екі бірдей бөлшек үш еселенбеген бірбөлшектік орбитальды толтыра алады. Орбиталь энергиялары $0, \Delta, 2\Delta$. $\beta\Delta = \ln 2$. Жүйені екі жағдайда салыстырыңыз: спинсіз бозондар және спиндері бір бағытқа толық полярланған фермиондар. Рұқсат етілген толтыру сандарын, канондық статистикалық қосындыны және орташа толық энергияны табыңыз.

Модель. Бөлшек саны дәл $N = 2$. Орбитальдар толтыру сандарымен (n_0, n_1, n_2) сипатталады. Бозондар үшін $n_i = 0, 1, 2, \dots$, фермиондар үшін Паули принципіне сәйкес $n_i = 0$ немесе 1.

1. Көпбөлшектік күйлерді санау. $n_0 + n_1 + n_2 = 2$ және $E = \Delta(n_1 + 2n_2)$.

Толтыру сандары	E/Δ	Бозондар	Фермиондар
(2,0,0)	0	Рұқсат	Тыйым
(1,1,0)	1	Рұқсат	Рұқсат
(1,0,1)	2	Рұқсат	Рұқсат
(0,2,0)	2	Рұқсат	Тыйым
(0,1,1)	3	Рұқсат	Рұқсат
(0,0,2)	4	Рұқсат	Тыйым

2. Статистикалық қосындылар. $x = e^{-\beta\Delta} = 1/2$ болса,

$$Z_B = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4 = \frac{35}{16}, \quad Z_F = x + x^2 + x^3 = \frac{7}{8}.$$

Бозондардағы $2x^2$ мүшесі энергиялары бірдей екі әртүрлі көпбөлшектік күйден пайда болады.

3. Орташа энергияларды есептеу. $P_s = e^{-\beta E_s}/Z$ және $U = \sum_s E_s P_s$:

$$\frac{U_B}{\Delta} = \frac{x + 4x^2 + 3x^3 + 4x^4}{Z_B} = \frac{34}{35} = 0.97143,$$
$$\frac{U_F}{\Delta} = \frac{x + 2x^2 + 3x^3}{Z_F} = \frac{11}{7} = 1.57143.$$

Жауабы. Бозондар үшін 6 күй, $Z_B = 35/16$, $U_B = 34\Delta/35$; фермиондар үшін 3 күй, $Z_F = 7/8$, $U_F = 11\Delta/7$.

Тексеру және түсіндіру. $T \rightarrow 0$ кезінде бозондардың екі бөлшегі де төменгі орбитальға орналасып, $U_B \rightarrow 0$; фермиондар әртүрлі орбитальдарды толтырып, $U_F \rightarrow \Delta$. Толтыру сандары арқылы санағанда бірдей бөлшектерді алмастыру жаңа күй туғызбайды, сондықтан қосымша $2!$ бөлгіші енгізілмейді. Энергия айырмасы өзара әсерлесуден емес, кванттық күйлерді толтыру ережелерінен шығады.

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылусыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Ферми Дирак Бозе Эйнштейн және Максвелл Больцман таралулары

Фермиондар мен бозондар статистикасы. Үш таралуды салыстыру.

Шарты. Энергиясы ε болатын деңгейде $g = 4$ тәуелсіз бірбөлшектік күй бар. Жүйе үлкен канондық ансамбльмен сипатталады және $(\varepsilon - \mu)/(k_B T) = \ln 3$. Ферми–Дирак, Бозе–Эйнштейн және Максвелл–Больцман таралулары бойынша бір күйдің орташа толуын, бүкіл деңгейдегі орташа бөлшек санын және оның дисперсиясын табыңыз. Классикалық жуықтаудың дәлдігін бағалаңыз.

1. Бір күйге қатысты қосындылар. $q = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} = 1/3$ деп белгілейміз. Фермион үшін $n = 0, 1$, бозон үшін $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\varepsilon_F = 1 + q, \quad \varepsilon_B = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Бозондық қатар $q < 1$ кезінде жинақталады; берілген күй бұл шартты қанағаттандырады.

2. Орташа толтыруларды шығару. $\langle n \rangle = q \partial \ln \varepsilon / \partial q$ формуласынан

$$\langle n \rangle_F = \frac{q}{1 + q} = \frac{1}{4}, \quad \langle n \rangle_B = \frac{q}{1 - q} = \frac{1}{2}, \quad \langle n \rangle_{MB} = q = \frac{1}{3}.$$

Соңғы өрнек — $q \ll 1$ кезіндегі классикалық шек.

3. Дисперсияларды табу. Үлкен канондық ансамбльде бір күй үшін $\text{Var}(n) = q \partial \langle n \rangle / \partial q$. Сондықтан

$$\text{Var}_F(n) = \langle n \rangle_F (1 - \langle n \rangle_F), \quad \text{Var}_B(n) = \langle n \rangle_B (1 + \langle n \rangle_B).$$

Максвелл–Больцман шегінде толтыру Пуассон заңына сәйкес: $\text{Var}_{MB}(n) = \langle n \rangle_{MB}$. Тәуелсіз g күй үшін орташа мән мен дисперсия g есеге көбейеді.

Статистика	Бір күйдегі $\langle n \rangle$	Деңгейдегі $\langle N_\varepsilon \rangle$	$\text{Var}(N_\varepsilon)$
Ферми–Дирак	1/4	1	3/4
Бозе–Эйнштейн	1/2	2	3
Максвелл–Больцман	1/3	4/3	4/3

4. Классикалық жуықтауды бағалау. Максвелл–Больцман мәні фермиондық орташа мәннен 33.3% артық, бозондық мәннен 33.3% кем. Сондықтан $q = 1/3$ кезінде классикалық жуықтау дәл емес. $q \ll 1$ болса, үш таралу да $\langle n \rangle \simeq q$ шегіне ұмтылады.

Жауабы. Деңгейдегі орташа бөлшек сандары тиісінше 1, 2, 4/3; дисперсиялары 3/4, 3, 4/3.

Түсіндіру. Фермиондарда Паули принципі флуктуацияны азайтады, бозондарда бір күйді бірлесіп толтыру оны арттырады. «Бір күйде ең көбі бір фермион» деген ереже төрт күйден тұратын бүкіл деңгейде ең көбі бір бөлшек болады дегенді білдірмейді: бұл деңгейдің сыйымдылығы — төрт фермион.

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылусыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Фотондық газ және жылулық сәулелену

Фотондық газ статистикасы. Жылулық сәулелену заңдары.

Шарты. Қара қабырғалы қуыстың көлемі $V = 1.00 \times 10^{-3} \text{ м}^3$, температурасы $T = 1000 \text{ К}$. Ауданы $A = 1.00 \times 10^{-4} \text{ м}^2$ кішкене тесік $T_0 = 300 \text{ К}$ үлкен қара ортаға қарай ашылады. Көру коэффициенті бірге тең, қуыс температурасы тұрақты ұсталады. Фотондық газдың энергиясын, қысымын, толқын ұзындығы бойынша спектр максимумын және тесік арқылы шығатын таза сәулелік қуатты есептеңіз.

1. Фотондардың таралуын жазу. Тепе-теңдікте фотон саны сақталмайды, сондықтан $\mu = 0$. Екі поляризацияны ескерген Планк спектрінің көлемдік энергия тығыздығы:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}.$$

Бұл есепте ν — сәулелену жиілігі, зат мөлшері емес.

2. Толық энергия тығыздығын табу. $x = h\nu/(k_B T)$ ауыстыруын және $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1) dx = \pi^4/15$ интегралын қолданамыз:

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = aT^4, \quad a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} = \frac{4\sigma}{c}.$$

Мұнда $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{м}^2 \text{К}^4)$, $a = 7.56573325 \times 10^{-16} \text{ J}/(\text{м}^3 \text{К}^4)$.

$$u = 7.56573 \times 10^{-4} \text{ J}/\text{м}^3, \quad U = uV = 7.56573 \times 10^{-7} \text{ J}.$$

3. Қысым мен спектр максимумын есептеу. Изотропты фотондық газ үшін

$$p = \frac{u}{3} = 2.52191 \times 10^{-4} \text{ Pa}.$$

Толқын ұзындығы бойынша спектрге Вин ығысу заңын қолданамыз:

$$\lambda_{\max} T = b, \quad b = 2.897771955 \times 10^{-3} \text{ м К}; \quad \lambda_{\max} = 2.898 \text{ мкм}.$$

4. Таза қуатты табу. Изотропты сәулеленудің бір жаққа шығатын ағыны $cu/4 = \sigma T^4$. Қарсы бағытта ортадан келетін сәулеленуді алып тастаймыз:

$$P_{\text{net}} = A\sigma(T^4 - T_0^4) = 5.62444 \text{ W}.$$

Жеке ағындар: $P_{\text{out}} = 5.67037 \text{ W}$, $P_{\text{in}} = 0.0459300 \text{ W}$.

Жауабы. $U = 7.566 \times 10^{-7} \text{ J}$; $p = 2.522 \times 10^{-4} \text{ Pa}$; $\lambda_{\max} = 2.898 \text{ мкм}$; таза қуат $P = 5.624 \text{ W}$.

Түсіндіру. u көлемдік энергия тығыздығын ағынмен шатастыруға болмайды: олардың өлшемдері әртүрлі, байланысы $M = cu/4$. Жиілік бойынша спектр максимумын жай ғана $\lambda = c/\nu$ арқылы түрлендіру толқын ұзындығы бойынша максимумды бермейді, себебі спектрлік тығыздықтың өлшемі өзгереді.

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылусыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Күшті азғындалған идеал электрондық газ

Күшті азғындалу кезіндегі бірдей фермиондардың идеал газы.

Шарты. Үшөлшемді идеал электрондық газдың концентрациясы $n = 8.50 \times 10^{28} \text{ м}^{-3}$, температурасы $T = 300 \text{ К}$. Электронның массасы $m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \text{ кг}$, спиндік еселік $g = 2$. Ферми толқын санын, Ферми энергиясын, Ферми температурасын, нөлдік температурадағы қысымды және $C_V/(Nk_B)$ қатынасын табыңыз. Күшті азғындалу және релятивистік емес жуықтауларды тексеріңіз.

Модель. $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / (2m_e)$; өзара әсерлесу мен тор әсері ескерілмейді. Қысым $T = 0$ шегінде, C_V төмен температураның жетекші жуықтауында есептеледі.

1. Ферми сферасындағы күйлерді санау. Бір k күйінің көлемі $(2\pi)^3/V$. Екі спиндік күйді ескерсек,

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k_F^3}{3}, \quad k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = 1.36023 \times 10^{10} \text{ м}^{-1}.$$

2. Энергия мен температура.

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = 1.12943 \times 10^{-18} \text{ Дж} = 7.049 \text{ эВ},$$
$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = 8.1804 \times 10^4 \text{ К}, \quad \frac{T}{T_F} = 3.6673 \times 10^{-3} \ll 1.$$

Газ күшті азғындалған. Ферми жылдамдығы $v_F = \hbar k_F / m_e = 1.575 \times 10^6 \text{ м/с}$; $v_F/c = 0.00525 \ll 1$, сондықтан релятивистік емес модель жарамды.

3. Нөлдік температурадағы қысым. Үшөлшемді күйлер тығыздығы $D(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$ болғандықтан,

$$N = \int_0^{E_F} D(\varepsilon) d\varepsilon, \quad U_0 = \int_0^{E_F} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Интегралдау нәтижелерінің қатынасы $U_0/N = [(2/5)E_F^{5/2}]/[(2/3)E_F^{3/2}] = 3E_F/5$.

Релятивистік емес еркін газ үшін $p_0 = 2U_0/(3V)$:

$$p_0 = \frac{2}{5} n E_F = 3.8401 \times 10^{10} \text{ Па} = 38.40 \text{ ГПа}.$$

4. Төмен температурадағы жылуsыйымдылық. Бөлшек саны мен көлем тұрақты болғанда Зоммерфельд жіктеуі:

$$U \simeq \frac{3}{5} N E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right].$$

Температура бойынша туынды алып,

$$\frac{C_V}{Nk_B} \simeq \frac{\pi^2 T}{2 T_F} = 0.01810.$$

Жауабы. $k_F = 1.360 \times 10^{10} \text{ м}^{-1}$; $E_F = 7.049 \text{ эВ}$; $T_F = 8.180 \times 10^4 \text{ К}$; $p_0 = 38.40 \text{ ГПа}$; $C_V/(Nk_B) \simeq 0.01810$.

Түсіндіру. Паули принципіне байланысты қысым $T = 0$ кезінде де сақталады. Жылулық қозуға Ферми бетіне жақын электрондар қатысатындықтан, C_V классикалық $3Nk_B/2$ мәнінен аз. Мұндағы қысым — идеал электрондық газдың үлесі; нақты металдың толық қысымы бөлек есептеледі.