

Белгілеулер және тұрақтылар

N — бөлшектер саны; v — зат мөлшері;

$n = N/V$ — сандық концентрация;

p — қысым, ал фазалық есептердегі p — импульс;

$\beta = 1/(k_B T)$. C_V — бүкіл жүйенің,

$C_{V,m}$ — бір мольдің жылу сыйымдылығы.

Барлық логарифмдер — натурал логарифмдер.

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K;

$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ mol⁻¹;

$R = N_A k_B = 8.314462618$ J/(mol K).

$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J s;

$\hbar = h/(2\pi)$;

$c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s;

1 eV = $1.602176634 \times 10^{-19}$ J.

Бөлшектер санының флуктуациясы

Дисперсия, орташа квадраттық және салыстырмалы флуктуациялар.

Шарты. Тепе-теңдіктегі классикалық идеал газда $N = 10^6$ бөлшек бар. Ыдыс ішінен толық көлемнің $a = 0.0100$ бөлігін алатын шағын аймақ таңдалған. Бөлшектердің орындары тәуелсіз және көлем бойынша бірқалыпты таралған. Осы аймақтағы M бөлшектер санының орташа мәнін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын және салыстырмалы флуктуациясын есептеңіз.

1. Кездейсоқ шаманы құрастыру. i -бөлшек аймақта болса $X_i = 1$, сыртында болса $X_i = 0$ деп белгілейміз. Сонда

$$M = \sum_{i=1}^N X_i, \quad P(X_i = 1) = a, \quad P(X_i = 0) = 1 - a.$$

Бөлшек аймаққа түсуі немесе түспеуі мүмкін болғандықтан, M биномиалдық заңға бағынады:

$$P(M = m) = \binom{N}{m} a^m (1 - a)^{N-m}.$$

2. Орташа мәнді есептеу. $\langle X_i \rangle = a$ болғандықтан,

$$\langle M \rangle = \sum_i \langle X_i \rangle = Na = 10^4.$$

3. Дисперсияны табу. $X_i^2 = X_i$, сондықтан

$$\text{Var}(X_i) = \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2 = a - a^2 = a(1 - a).$$

Тәуелсіз шамалардың ковариациялары нөлге тең, ал дисперсиялары қосылады:

$$\text{Var}(M) = Na(1 - a) = 10^6 \times 0.01 \times 0.99 = 9900.$$

4. Флуктуацияларды есептеу.

$$\sigma_M = \sqrt{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{9900} = 99.50,$$

$$\delta_M = \frac{\sigma_M}{\langle M \rangle} = \sqrt{\frac{1 - a}{Na}} = 9.950 \times 10^{-3} = 0.9950\%.$$

Жауабы. $\langle M \rangle = 10000$ бөлшек; $\text{Var}(M) = 9900$; $\sigma_M \approx 99.5$ бөлшек; салыстырмалы флуктуация 0.995%.

Тексеру және түсіндіру. $a \ll 1$ кезінде $\text{Var}(M) \approx \langle M \rangle$ — Пуассон жуықтауы орындалады. Бірақ дәл биномиалдық жауапта $1 - a$ көбейткіші сақталады. $a = 1$ болғанда бүкіл ыдыстағы бөлшектер саны тұрақты, сондықтан дисперсия нөлге айналады. Орташа сан артқан сайын салыстырмалы ауытқу шамамен $1/\sqrt{\langle M \rangle}$ заңымен кемиді.