

Мұнда $\lambda_{\max}$ — спектрдегі сәуле шығару қарқындылығы ең жоғары болатын толқын ұзындығы, ал b — Вин тұрақтысы.

Бұл заң температура артқан сайын сәулеленудің максимумы қысқа толқындар аймағына қарай ығысатынын көрсетеді.

Мысалы, салыстырмалы түрде төмен температурадағы денелер негізінен инфрақызыл сәуле шығарады. Температура жоғарылаған кезде сәуле шығарудың көрінетін жарық аймағындағы үлесі арта бастайды. Өте жоғары температурада сәулелену спектрі қысқа толқындар жағына қарай ығысады.

Рэлей–Джинс заңы. Классикалық статистикаға сүйеніп жылулық сәулеленудің спектрін түсіндіру үшін Рэлей–Джинс заңы ұсынылды:

$$u(\nu, T) = 8\pi\nu^2 k_B T / c^3$$

Бұл өрнек төмен жиіліктер аймағында Планк заңына жақын нәтиже береді. Алайда жоғары жиіліктерде ол тәжірибеге сәйкес келмейді және энергияның шексіз өсуін болжайды.

Планк заңының төмен жиілік шегінде Рэлей–Джинс формуласына айналатынын көрсетуге болады. Егер

$$h\nu \ll k_B T$$

болса, экспонентаны жуықтап

$$\exp(h\nu / (k_B T)) - 1 \approx h\nu / (k_B T)$$

деп алуға болады.

Сонда Планк формуласы

$$u(\nu, T) \approx 8\pi\nu^2 k_B T / c^3$$

түріне келеді. Бұл дәл Рэлей–Джинс заңына сәйкес келеді.

Жоғары жиіліктерде $h\nu \gg k_B T$ болғандықтан, кванттық әсерлер маңызды болады және Планк заңы классикалық теориядан айтарлықтай ерекшеленеді.

Бақылау сұрақтары:

1) Таза жартылайөткізгіштің температура төмендеген сайын электрөткізгіштігі қалай өзгереді?

2) Жартылайөткізгіштердің меншікті электрөткізгіштігінің формуласын жаз.

3) Таза жартылайөткізгіштің рұқсат етілмеген аймағының енін қандай формуламен анықтауға болады?

4) Фотондық газдың статистикалық қасиеттері қалай сипатталады?

5) Планктың жылулық сәулелену заңы қалай жазылады және оның физикалық мағынасы қандай?

6) Стефан–Больцман және Виннің ығысу заңдары жылулық сәулеленудің қандай қасиеттерін сипаттайды?

Пайдаланған әдебиеттер: негізгі әдебиет – [2-5], қосымша әдебиет [1,2].

Дәріс №15 Күшті азғындалу кезіндегі бірдей фермиондардың идеал газы

Дәріс жоспары: 1) Жүйе потенциалы.

2) Кванттық статистика бойынша металдардың жылу сыйымдылығына электрондардың қосқан үлесі.

Төмен температуралардағы бірдей фермиондардың идеал газын қарастырайық. Бірбөлшекті бөлшектердің күйі p импульс шамасымен сипатталады, ал олардың энергиясы

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$$

Макроскопиялық жүйеде көптеген бөлшектер үлкен квант сандарымен бірбөлшекті күйде болады және олардың қозғалыстары квазиклассикалық. Бұл шарттарда бір квант жағдайға фазалық кеңістікте h^3 көлем сәйкес келеді. dp элементтегі импульске және V көлемге сәйкес келетін квант жағдай саны мынаған тең:

$$2 \frac{V dp}{h^3}$$

2 көбейткіші спиннің мүмкін болатын екі бағытын (спині $\frac{1}{2}$ болатын бөлшектерді қарастырамыз) ескереді. P үздіксіз өзгертіндіктен, кванттық жағдай бойынша суммалаудан p бойынша интегралдауға өтуге болады:

$$\sum_p \rightarrow \frac{2V}{h^3} \int dp$$

Егер интеграл астындағы функция энергияға ғана тәуелді болса, онда энергия бойынша интегралдауға көшіруге болады.

$$dp = 4\pi p^2 dp, \quad p dp = m d\varepsilon, \quad p = \sqrt{2m\varepsilon}, \quad dp = \sqrt{2m} \frac{1}{2} d\varepsilon, \\ \sum_p \rightarrow \frac{2V}{h^3} \int dp = \int g(\varepsilon) d\varepsilon, \quad g(\varepsilon) = \frac{2V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \equiv aV \sqrt{\varepsilon}.$$

Қарастырылатын Ω – жүйе потенциалы үшін

$$\Omega = -kT \sum_p \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon_p)/kT}) = -aV kT \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \ln(1 + e^{(\mu - \varepsilon)/kT}) d\varepsilon.$$

Бөлшек бойынша интегралдаудан және қарапайым алгебралық өрнектеуден кейін бұл формула мына түрге келеді:

$$\Omega = -\frac{2}{3} aV \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1} d\varepsilon = -\frac{2}{3} \int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = -\frac{2}{3} E. \quad (69)$$

Интегралдаудың жаңа $x = \frac{\varepsilon}{kT}$ айнымалысына өтіп, $z = \frac{\mu}{kT}$ белгілеуін енгіземіз. Бұдан әрі

$z \geq 1$ деп санаймыз, бұл күшті азғындалуға (төмен температуралар) сәйкес келеді.

$$\Omega = -\frac{2}{3} aV (kT)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{(x-z)} + 1} dx$$

Жалпы түрлі интегралды қарастырайық.

$$I = \int_0^\infty \frac{\check{\varphi}(x) dx}{e^{(x-z)} + 1}$$

Мұндағы $\check{\varphi}(x) dx = d\varphi(x)$. Бөлшек бойынша интегралдай және интегралдаудың жаңа $y = x - z$ айнымалысына өтіп алатынымыз.

$$I = \int_0^\infty \frac{d\varphi(x)}{e^{(x-z)} + 1} = \frac{\varphi(x)}{e^{(x-z)} + 1} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(x) \frac{e^{(x-z)}}{(e^{(x-z)} + 1)^2} dx = \\ = -\varphi(0) + \int_{-z}^\infty \varphi(z+y) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} dy \approx -\varphi(0) + \int_{-\infty}^\infty \varphi(z+y) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} dy,$$

Мұнда біз соңғы интегралда $-z$ төменгі шекті $-\infty$ ауыстырдық, функция $f(y) = \frac{e^y}{(e^y+1)^2}$ жұп бола $f(-y) = f(y)$, $y \rightarrow \pm\infty$ -те 0-ге дейін тез ұмтылады және интегралдауды ~ 1 аралық шектейді. Бұл интегралдау аймағында $\varphi(z+y)$ функциясын $y(|y| \ll z)$ бойынша дәрежелік қатарға жіктеуге болады.

$$\varphi(z+y) = \varphi(z) + \varphi'(z)y + \frac{1}{2} \varphi''(z)y^2 + \dots$$

У тақ дәрежелі интегралдар 0-ге тең, ал

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(y)}{(e^y+1)^2} dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 \exp(y)}{(e^y+1)^2} dy = \frac{\pi^2}{3}, \dots,$$

I интегралы үшін қатарға жіктеу не береді:

$$I = -\varphi(0) + \varphi(z) + \frac{\pi^2}{6} \varphi''(z) + \dots$$

Біздің жағдайда

$$\varphi(x) = -\frac{2}{5} x^{5/2}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(z) = -\frac{2}{5} z^{5/2}, \quad \varphi''(z) = \frac{3}{2} z^{1/2}, \dots,$$

Кіші параметр $z^{-1} = \frac{kT}{\mu}$ бойынша Ω үшін қатарға әкелгенде:

$$\Omega = -\frac{4}{15} aV \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5}{8} \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]. \quad (70)$$

(69) сәйкес бұл **ішкі энергия** үшін келесі жіктеуді береді:

$$E(T, V, \mu) = \frac{2}{5} aV \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5}{8} \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]. \quad (71)$$

Тұрақты көлемдегі (тұрақты бөлшек саны) кезіндегі жылусыйымдылықты анықтау үшін $C_{V,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N}$, алдымен (70) формуладан $N = N(T, V, \mu)$ табамыз, бұл қатынастан

$\mu = \mu(T, V, N)$ -ды (71) формулаға қойып анықтаймыз, содан кейін ғана дифференциалдау арқылы $C_{V,N}$ жылу сыйымдылығын табамыз. (3,9 бөлімін қараңыз).

$$N(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \frac{2}{3} aV \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]. \quad (72)$$

$\mu = \mu(T, V, N)$ шамасын кіші параметр дәрежелерін жіктеу арқылы алуға болады.

$$\mu_0 \equiv \mu(0, V, N) = \left(\frac{3N}{2aV} \right)^{2/3} = \frac{(3\pi^2 n)^{2/3}}{2m}, \quad (n = \frac{N}{V}).$$

Егер тек қана жіктеудегі $\mu = \mu(T, V, N)$ мүшелермен $\frac{kT}{\mu_0}$ кіші параметр бойынша

квадраттықпен ғана шектелсек, онда (73) формуладан мынадай формула аламыз:

$$\mu = \mu(T, V, N) = \mu_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right].$$

Бұл шаманы $\mu = \mu(T, V, N)$ үшін (71) формулаға E энергия үшін қойып және $\frac{kT}{\mu_0}$ бойынша жіктеп екінші кіші қатар мүшелерімен шектелеміз:

$$E = \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right].$$

Жылусыйымдылық үшін:

$$C_{V,N}^{(кв.)} = \frac{\pi^2}{2} N k \frac{kT}{\mu_0} + \dots \sim T.$$

Классикалық статистика бойынша:

$$C_{V,N}^{(кл.)} = \frac{3}{2} N k.$$

Осыдан:

$$\frac{C_{V,N}^{(кв.)}}{C_{V,N}^{(кл.)}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{\mu_0} \ll 1,$$

Яғни, кванттық статистикаға сәйкес металдардың жылусыйымдылығына электрондардың қосқан үлесі (вклад) абсолют температураға пропорционал және классикалық теория бойынша айтарлықтай аз.

Кванттық статистикалық физикада бірдей фермиондардан тұратын жүйелердің қасиеттерін зерттеудің ерекше маңызы бар. Фермиондарға электрондар, протондар және нейтрондар жатады. Олардың негізгі ерекшелігі — Паули принципіне бағынуы. Сондықтан фермиондардың көпшілігін бір ғана ең төменгі энергетикалық күйге жинақтау мүмкін емес. Күшті азғындалған газ деп температурасы төмен немесе бөлшектер концентрациясы жоғары болған жағдайда кванттық әсерлері басым болатын фермиондық газды айтады. Мұндай жүйеде бөлшектердің энергетикалық күйлер бойынша таралуы классикалық Максвелл–Больцман статистикасымен емес, Ферми–Дирак статистикасымен сипатталады. Металдардағы еркін электрондар газын күшті азғындалған фермиондық газға мысал ретінде қарастыруға болады. Қалыпты температураларда металдағы электрондардың басым бөлігі Ферми деңгейіне жақын энергетикалық аймақта орналасады. Сондықтан металдардың жылусыйымдылығын түсіндіруде электрондардың кванттық статистикасын ескеру қажет.

Жүйе потенциалы. Фермиондардың идеал газын қарастырғанда бөлшектер арасындағы өзара әсерлесуді елемеге болады. Мұндай жүйеде бөлшектердің толық энергиясы олардың кинетикалық энергияларының қосындысымен анықталады:

$$E = \sum_{i=1 \dots N} p_i^2 / (2m)$$

Мұнда N — бөлшектер саны, m — бір бөлшектің массасы, p_i — i -бөлшектің импульсі. Егер бөлшектер үш өлшемді кеңістікте еркін қозғалса, бір бөлшектің кинетикалық энергиясы

$$E = p^2 / (2m)$$

немесе импульс компоненттері арқылы

$$E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / (2m)$$

түрінде жазылады.

Кванттық механикада бөлшектің импульсі мен координатасы классикалық механикадағыдай кез келген үздіксіз мәндерді қабылдай бермейді. Бөлшек белгілі бір кванттық күйлер жиынтығында орналасады.

Көлемі V болатын үш өлшемді кеңістікте еркін бөлшектің энергиясы импульс арқылы анықталады. Кванттық механикада импульс компоненттері шекаралық шарттарға байланысты дискретті мәндер қабылдайды. Қарапайым шекаралық шарттар үшін

$$p_x = 2\pi\hbar n_x/L,$$

$$p_y = 2\pi\hbar n_y/L,$$

$$p_z = 2\pi\hbar n_z/L$$

түрінде жазуға болады. Мұнда L — жүйенің сызықтық өлшемі, ал p_x , p_y , p_z — бүтін кванттық сандар.

Осыдан бөлшектің энергетикалық деңгейлері де кванттық сипатқа ие болады. Фермиондардың күйде орналасуын анықтау үшін Ферми–Дирак таралуы пайдаланылады:

$$f(E) = 1 / [\exp((E - \mu)/(k_B T)) + 1]$$

Бұл функция энергиясы E болатын күйдің орташа толу санын көрсетеді. Фермиондар үшін бір кванттық күйдің толу саны Паули принципіне байланысты шектеледі. Күшті азғындалу жағдайында температураны Ферми температурасымен салыстыру маңызды. Ферми температурасы

$$T_F = E_F/k_B$$

түрінде анықталады. Мұнда E_F — Ферми энергиясы.

Егер

$$T \ll T_F$$

болса, жүйе күшті азғындалған деп есептеледі. Бұл жағдайда бөлшектердің жылулық энергиясы олардың Ферми энергиясымен салыстырғанда аз:

$$k_B T \ll E_F.$$

Сондықтан температураның өзгеруі барлық электрондарға емес, негізінен Ферми деңгейіне жақын орналасқан электрондарға әсер етеді.

Ферми энергиясы

$$E_F = \hbar^2/(2m) \cdot (3\pi^2 n)^{2/3}$$

формуласымен анықталады. Мұнда $n = N/V$ — бөлшектер концентрациясы.

Бұл өрнек абсолют нөл температурада фермиондар энергия деңгейлерін төменнен жоғары қарай толтырып, белгілі бір ең жоғары энергияға дейін жететінін көрсетеді. Сол энергия Ферми энергиясы деп аталады.

$T = 0$ кезінде Ферми–Дирак таралуы өте қарапайым түрде сипатталады: $E < E_F$ болған жағдайда күйлер толтырылады, ал $E > E_F$ болған жағдайда күйлер бос болады. Температура нөлден жоғары болғанда Ферми деңгейінің маңындағы таралу біртіндеп өзгереді. Бірақ $T \ll T_F$ жағдайында бұл өзгеріс энергияның өте тар аймағында ғана жүреді. Ферми газындағы бөлшектердің толық энергиясын күй тығыздығы арқылы анықтауға болады. Үш өлшемді еркін бөлшектер үшін энергия бойынша күйлер саны энергияның квадрат түбіріне пропорционал:

$$g(E) \propto E^{1/2}.$$

Сондықтан жүйенің ішкі энергиясын барлық энергетикалық күйлер бойынша қосу немесе интегралдау арқылы анықтауға болады.

Күшті азғындалған фермиондық газдың негізгі ерекшелігі — оның қасиеттері температураға классикалық газдағыдай тәуелді болмайды. Мысалы, абсолют нөлге жақын температурада да жүйенің энергиясы нөлге айналмайды. Себебі Паули принципіне байланысты фермиондар ең төменгі энергетикалық күйдің барлығына бірдей орналаса алмайды.

Осы құбылыс фермиондық газдың нөлдік температурада да белгілі бір ішкі энергияға ие болуына әкеледі. Бұл энергия азғындалу энергиясы деп аталады. Кванттық статистика бойынша металдардың жылусыйымдылығына электрондардың қосқан

үлесі

Металдардың жылуsыйымдылығын зерттеген кезде оның бірнеше құрамдас бөліктен тұратынын ескеру қажет. Металдың кристалдық торы тербеледі және оның электрондары қозғалады. Сондықтан жалпы жылуsыйымдылықты жуықтап

$$C = C_{\text{тор}} + C_{\text{эл}}$$

деп жазуға болады.

Мұнда $C_{\text{тор}}$ — кристалдық тордың жылуsыйымдылығы, ал $C_{\text{эл}}$ — өткізгіш электрондардың жылуsыйымдылыққа қосатын үлесі.

Классикалық физика тұрғысынан әрбір еркін электрон жылуsыйымдылыққа елеулі үлес қосуы керек еді. Егер электрондарды классикалық идеал газ ретінде қарастырсақ, олардың ішкі энергиясы

$$U = 3Nk_B T/2$$

болар еді.

Сонда электрондардың жылуsыйымдылығы

$$C_{\text{эл}} = (\partial U / \partial T) V = 3Nk_B/2$$

мәніне тең болар еді.

Бірақ тәжірибеде металдардың электрондық жылуsыйымдылығы классикалық теория болжаған мәннен әлдеқайда аз болып шығады. Бұл айырмашылықты Ферми–Дирак статистикасы арқылы түсіндіруге болады.

Күшті азғындалған электрондық газда барлық электрондар жылулық энергияны бірдей қабылдай алмайды. Паули принципіне байланысты электрондардың көпшілігі толтырылған төменгі энергетикалық күйлерде орналасады. Температура артқанда олар бірден жоғары энергетикалық күйлерге өте алмайды.

Жылулық қозуға негізінен Ферми энергиясына жақын орналасқан электрондар ғана қатысады.

Температура өте төмен болған жағдайда электрондардың жылуsыйымдылығы температураға тура пропорционал:

$$C_{\text{эл}} = \gamma T$$

Бұл жерде γ — металдың электрондық жылуsыйымдылық коэффициенті.

Бір моль үшін электрондық жылуsыйымдылықты жуықтап

$$C_{\text{эл},m} = (\pi^2/2) R \cdot T/T_F$$

түрінде көрсетуге болады.

Бұл өрнек электрондық жылуsыйымдылықтың неге аз екенін түсіндіреді. Егер $T \ll T_F$ болса, онда T/T_F өте кіші сан болады. Сондықтан электрондардың жылуsыйымдылығы классикалық мәннен әлдеқайда төмен болады.

Электрондық жылуsыйымдылықтың температураға сызықтық тәуелділігі

$C_{\text{эл}} \propto T$ түрінде жазылады.

Бұл — күшті азғындалған фермиондық газдың маңызды қасиеттерінің бірі.

Ал металдың кристалдық торының жылуsыйымдылығы төмен температурада шамамен

$$C_{\text{тор}} \propto T^3$$

заңымен өзгереді. Сондықтан төмен температура аймағында металдың толық жылуsыйымдылығын

$$C = \gamma T + \beta T^3$$

түрінде жазуға болады.

Бұл өрнектің бірінші мүшесі электрондарға, екінші мүшесі кристалдық тордың тербелістеріне сәйкес келеді.

Температура жеткілікті төмен болған кезде T мүшесі мен T^3 мүшесін тәжірибелік мәліметтер арқылы ажыратуға болады. Егер

$$C/T = \gamma + \beta T^2$$

деп жазсақ, C/T шамасын T^2 -ке тәуелділікпен зерттеу арқылы электрондық үлеске сәйкес келетін γ коэффициентін анықтауға болады.

Электрондық жылусыйымдылықтың аз болуының физикалық себебін былай түсіндіруге болады. Металдағы электрондардың көпшілігі төменгі энергетикалық күйлерді толтырып тұрады. Температура өзгерген кезде олардың басым бөлігі өз күйін өзгерте алмайды, себебі төменгі күйлердің барлығы толтырылған және Паули принципі жаңа күйге өту мүмкіндігін шектейді.

Тек Ферми энергиясына жақын орналасқан электрондардың аз бөлігі ғана жылулық қозуға қатыса алады. Сондықтан металдағы электрондардың жалпы саны өте көп болғанымен, жылусыйымдылыққа тиімді үлес қосатын электрондардың саны салыстырмалы түрде аз.

Бұл жағдай металдардың жылулық қасиеттерін түсіндіруде кванттық статистиканың маңызды рөл атқаратынын көрсетеді.

Ферми энергиясы мен электрондардың жылусыйымдылығының байланысы Электрондық жылусыйымдылықтың шамасы Ферми энергиясына немесе Ферми температурасына тәуелді. Ферми температурасы жоғары болған сайын қалыпты температураның өзінде

$$T \ll T_F$$

шарты орындалуы мүмкін. Мұндай жағдайда электрондық газ әлі де күшті азғындалған болып қалады.

Металдар үшін Ферми температурасы әдетте өте жоғары болады. Сондықтан бөлме температурасында да металдағы өткізгіш электрондарды классикалық газ ретінде қарастыруға болмайды.

Бұл — кванттық статистиканың макроскопиялық денелердің қасиеттеріне тікелей әсер ететінінің маңызды мысалы.

Бақылау сұрақтары:

- 1) Күшті азғындалған бірдей фермиондардың идеал газының жылусыйымдылығы қалай анықталады?
- 2) Классикалық жағдай үшін ішкі энергия қалай анықталады?
- 3) Күшті азғындалған фермиондық газ дегеніміз не және оның негізгі қасиеттері қандай?
- 4) Ферми энергиясы мен Ферми температурасы қалай анықталады және олардың физикалық мағынасы қандай?
- 5) Ферми–Дирак статистикасы металдардағы электрондардың энергетикалық күйлер бойынша таралуын қалай сипаттайды?
- 6) Металдардың жылусыйымдылығына электрондардың қосатын үлесі температураға қалай тәуелді?
- 7) Металдың толық жылусыйымдылығындағы электрондық және кристалдық тор үлестері қалай ажыратылады?

Пайдаланған әдебиеттер: негізгі әдебиет – [1-7], қосымша әдебиет [1-3].