

Дәріс №14 Фотондық газдың статистикасы және Жылулық сәулелену заңдары

Дәріс жоспары: 1) Фотондық газдың статистикасы.
2) Жылулық сәулелену заңдары.

Фотондық газдың статистикасы

Жылулық тепе теңдікте тұрған (қабырғасының T температурасы бар V көлемдегі ішінде сәулелену) электромагниттік сәулелену қара (жылулық) сәулелену деп атайды. Қазіргі жаңа көзқараспен оны фотонның идеал газ – спині бірге тең бөлшек ретінде қарастыруға болады. Сондықтан оның термодинамикалық қасиеттерінің сәулеленуі қолдану үшін Бозе-Энштейн статистикасын қолданған жөн. Осы газдағы жылулық тепе теңдік ұстау процесі түтік қабырғасындағы фотондардың жұтылуы және сәулеленуі арқылы жүреді. Жүйедегі фотондар саны тіркелмеген, ал оны тепе- теңдік шарты арқылы алынады: берілген көлеммен температурада – бөлшектер санының функциясы секілді бос энергия мөлшері минимум.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} (= \mu) = 0,$$

яғни фотондар үшін $\mu = 0$. Фотондар келесі сипаттамаға ие: ω шеңберлік жиілігі, c таралу жылдамдығы ($c=299792458$ жарық таралу жылдамдығы), $\mathbf{k}$ толқындық вектор ($\mathbf{k} = \omega/c = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda$) импульс $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = n \hbar\omega/c$ ($n - \mathbf{k}$ бойындағы бірлік вектор), $\varepsilon = \hbar\omega = pc$.

Фотондар газының таралу функциясы

$$\bar{n}_i = \left(\exp \left(\frac{\hbar\omega_i}{kT} \right) - 1 \right)^{-1},$$

мұнда ω_i – берілген көлемдегі электромагниттік сәулеленудің өзіндік жиілігі. Егер көлем макроскопты (үлкен) болса, онда жиілік бойынша үзіліссіз таралуға көшуге болады. L қыры бар кубтағы жазық толқынды қарастырайық. Периодтық шартты қойып, кубтың қарама қарсы қырларының бірдей кернеулікті бірдей алатындай қылып жасаймыз.

$$\exp(ik_i(i+L)) = \exp(ik_i i), \quad i = x, y, z, \quad \exp(ik_i L) = 1.$$

Бұдан

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \quad \Delta k_i = dk = \frac{2\pi}{L}, \quad n_i = 0, \pm 1, \dots, \left[\pm \frac{L}{2} \right],$$

к бойынша суммалау, интегралдауға ауыстыруға болады

$$\sum_{k_i} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int dk.$$

n_x, n_y, n_z үштік санға, $\exp(i(k_x x + k_y y + k_z z))$ жазық толқын және поляризацияның екі күйі жатады. dk шарлық жағдайда күйлер саны:

$$dN_\omega = \bar{n}_\omega g(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1},$$

$\omega = kc$ тең болғандықтан. ω дан $\omega + d\omega$ аралығындағы фотондар саны, қарастырылатын V көлемде мынаған тең:

$$dN_\omega = \bar{n}_\omega g(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1},$$

V көлемдегі T температурадағы фотондардың толқындық саны үшін келесіні аламыз

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1}$$

немесе

$$N \approx \frac{2.4}{\pi^2} V \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \approx 20 VT^3. \quad (62)$$

$T = 300K$ $n = N/V = 5.4 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$ дегіні. $2.6 \cdot 10^{25}$ молекуланы қалыпты кездегі кубтық метрдегі ауамен салыстыруға болады.

dN_ω n $\hbar\omega$ ге көбейткенде ω ден $\omega + d\omega$ арасындағы жиіліктегі фотондар энергиясын аламыз

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Сәулеленудің **спектралды жазықтығы** үшін:

$$\rho_\omega = \frac{1}{V} \frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Бұл формула, жиіліктің бірлік интервалына апарылған, тепе теңдік сәулеленудің бірлік көлемдегі беретін энергия мөлшерін Планк формуласы деген атқа ие. $\hbar\omega \ll kT$ үшін **Релей-Джинс** формуласына өтеді – классикалық электродинамикадағы жазықтыққа өтеді.

$$\rho_\omega = \omega^2 \frac{kT}{\pi^2 c^3}. \quad (64)$$

Классикалық электродинамикадағы спектралыды жазықтық принципіалды қиындықтардың бірі болып табылады, яғни электромагниттік сәулеленудің тепе теңдік күйінен шексіз ішкі энергияға әкеліп соғады ($\int_0^\infty \rho(\omega) d\omega$ интегралы таралады).

Толық ішкі энергия үшін келесіні аламыз:

$$E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \frac{\pi^2}{15} V \frac{(kT)^4}{(ch)^3} \sim T^4. \quad (65)$$

Бір фотонға мынадай энергия мөлшері келеді:

$$E/N \approx \frac{\pi^4}{36} kT \approx 2.7 kT,$$

сол температурадағы идеалды бір атомдық газда бір атомға $1.5kT$ энергиясынан үлкен. Фотондар газының **жылуsыйымдылығы**:

$$C_V = \frac{4\pi^2}{15} V k \left(\frac{kT}{ch} \right)^3 = \frac{\pi^4}{9} kN. \quad (66)$$

Тепе теңдік сәулелену кезіндегі Ω – потенциалын табамыз

$$\begin{aligned} \Omega &= kT \sum_i \ln(1 - \exp(-\frac{\hbar\omega_i}{kT})) = \frac{V}{\pi^2 c^3} kT \int_0^\infty \ln(1 - \exp(-\frac{\hbar\omega}{kT})) \omega^2 d\omega = \\ &= \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \ln(1 - \exp(-x)) x^2 dx = -\frac{\pi^2}{45} V \frac{(kT)^4}{(ch)^3} = F, \end{aligned} \quad (67)$$

яғни, бөліктеп интегралдағанның нәтижесінен болған

$$\int_0^\infty \ln(1 - \exp(-x)) x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln(1 - \exp(-x)) \Big|_0^\infty - \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = -\frac{\pi^4}{45},$$

(67) ден **энтропия** үшін аламыз

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{4\pi^2}{45} V k \left(\frac{kT}{ch} \right)^3$$

және қысым үшін

$$p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} = \frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(ch)^3}.$$

Ішкі энергия $E = \Omega + TS$ үшінде (65) сол нәтиже болады. Бір фотонғы **жылуsыйымдылығы** $C_V/N \approx 11k$.

$T = 300 \text{ K}$ $E/V = 6.13 \times 10^{-6} \text{ Дж м}^{-3}$, $C_V/V = 0.817 \cdot 10^{-7} \text{ Дж К}^{-1} \text{ м}^{-3}$, $p = 2.04 \times 10^{-6} \text{ Н м}^{-2}$, $N/V = 0.548 \times 10^{15} \text{ м}^{-3}$ кезінде.

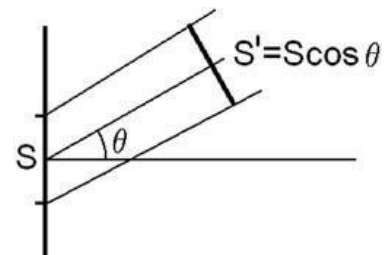
Сондықтан энергия, жылуsыйымдылық, қысым және тепе теңдік кезіндегі бірлік көлемдегі бөлшектер саны атомдық және молекулалық газдармен салыстырғанда көп мөлшерде аз. Бірақ әр температурада бір бөлшекте есептегенде жылуsыйымдылық және де ішкі энергия атомдық және молекулалық газдар үшін сәйкестік өлшемдер асып түседі. Фотондық газдағы бөлшектер саны берілген болып табылмайды және температураға байланысты өзгермейді.

Жылулық сәулелену заңдары

Жылулық тепе-теңдік күйінде

$$d\omega = \frac{E}{V} c \frac{d\Omega}{4\pi}$$

шамасы сәулелену энергия өрісінің $d\Omega$ денелік бұрышқа келетін тығыздығын береді. Температурасы T болатын абсолют қара дененің жазықтығын қарастырайық. Жазықтықтың әрбір бірлік ауданы барлық бағытта сәуле шығарады, бірақ сәуле шығарудың эффективтілігі ауданы θ бұрыштың өсуімен азаятындықтан сәуле шығару интенсивтілігі барлық бағытта бірдей болмайды. $d\Omega$ денелік бұрышқа, нормальмен θ бұрыш жасайтын



9- сурет. Абсолют қара дененің жазықтығынан сәулелену.

бағытта жазықтықтан келетін өріс косинус заңына тәуелді болады деп болжайық ($\sim \cos\theta$) (11 сурет).

мұндағы $\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 h^3 c^2}$ - Стефан – Больцман тұрақтысы.

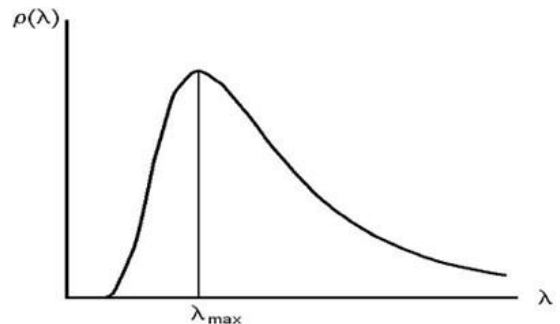
Сонымен, жазықтық ауданы S болатын абсолют қара дененің бірлік уақытта, абсолют температураның төртінші дәрежесіне тура пропорционал болатын толық энергиясы

$W = \sigma S T^4$ болады (Стефан - Больцман заңы).

Енді спектралдық сәулеленудің тығыздығын (63) толқын ұзындығы арқылы орнектейік (12 сурет):

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}; \quad |\rho(\omega)d\omega| = |\rho(\lambda)d\lambda|;$$

$$\rho(\lambda) = \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| \rho(\omega);$$



$$\rho(\lambda) = \frac{16\pi^2 hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{2\pi hc}{kT}) - 1}. \quad (68) \quad 10\text{- сурет. Спектрлік тығыздықтың}$$

(68) толқын ұзындығына тәуелділігі.

Сәулеленудің спектральді тығыздығының максимуміне сәйкес келетін толқын ұзындығын табайық.

$$\frac{d \ln \rho}{d \lambda} = \frac{1 d \rho}{\rho d \lambda},$$

онда, $\frac{d \rho}{d \lambda} = 0$ $\frac{d \ln \rho}{d \lambda} = 0$ дегенге сәйкес келеді. $a = \frac{2\pi hc}{kT}$ деп белгілейік, сонда

$$\ln \rho = -5 \ln \lambda - \ln(e^{a/\lambda} - 1) + \ln(16\pi^2 hc);$$

$$\frac{d \ln \rho}{d \lambda} = 0; \quad x = a/\lambda; \quad 1 - \exp(-x) = x/5; \quad x=4.965.$$

$$- \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1 - \exp(-x)} = 0$$

Спектральді тығыздықтың максимуміне сәйкес келетін толқын ұзындығы

$$\lambda_{max} = \frac{a}{4.965} = \frac{2\pi hc}{4.965 \cdot k} \cdot T$$

Температураның жоғарылауымен спектральді тығыздықтың максимумы қысқа толқындар жағына ығысады (Виннің ығысу заңы).

Электромагниттік сәулелену затпен өзара әсерлескен кезде оның энергия алмасуы үздіксіз емес, белгілі бір мөлшерлермен жүзеге асатыны тәжірибеде анықталған. Электромагниттік өрістің кванттары фотондар деп аталады.

Фотондардың массасы тыныштық күйде нөлге тең, электр заряды жоқ және олар вакуумда жарық жылдамдығымен қозғалады. Фотон энергиясы оның жиілігіне тәуелді:

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Мұнда $\hbar$ — Планк тұрақтысы, ν — сәулеленудің жиілігі, ал $\omega = 2\pi\nu$ — циклдік жиілік. Фотон энергиясының жиілікке пропорционал болуы электромагниттік сәулеленудің кванттық табиғатын көрсетеді.

Фотондар бүтін спинді бөлшектерге жатады, сондықтан олар бозондар болып табылады. Осыған байланысты фотондар Бозе–Эйнштейн статистикасына бағынады. Фотондық газдың статистикалық қасиеттері жылулық сәулеленуді, қара дененің сәуле шығаруын және электромагниттік өрістің энергиясының температураға тәуелділігін түсіндіруде маңызды.

Фотондық газдың статистикасы. Фотондық газ деп белгілі бір көлемде орналасқан