

Дәріс №13 Ферми-Дирак, Бозе-Энштейн және Максвелл-Больцман таралулары

Дәріс жоспары: 1) Ферми-бөлшектері статистикасы. Ферми-Дирак таралуы.

2) Бозе-бөлшектері статистикасы. Бозе-Энштейн таралуы.

3) Максвелл – Больцман таралуы.

Ферми-бөлшектері статистикасы. Ферми Дирак таралуы

Паули принципіне сәйкес, әрбір бірбөлшекті күйде бір бөлшек болуы, немесе ешқандай бөлшек болмауы мүмкін ($n_l = 0, 1$). Сондықтан

$$\sum_{n_l=0}^1 e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}\right) n_l} = 1 + e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}\right)}, \quad \Omega = -kT \sum_l \ln \left(1 + e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}\right)} \right)$$

Мына функцияны

$$f_l^{(F-D)} = -\frac{\partial \Omega_l}{\partial \mu} = \left(e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}\right)} + 1 \right)^{-1} = \bar{n}_l \quad (59)$$

Ферми Дирак таралу функциясы дейді. Оның физикалық мағынасы l - ші бірбөлшекті күйдегі бөлшектердің орташа санын білдіреді. Ал келесі қатынасты Ферми Дирак таралуының нормалау шарты дейді:

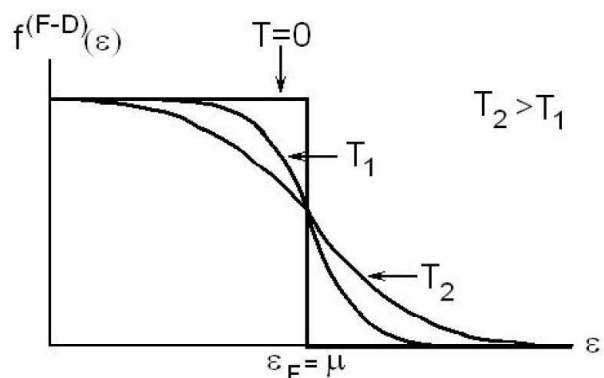
$$-\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_l \left(e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}\right)} + 1 \right)^{-1} = \sum_i g_i \left(e^{\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right)} + 1 \right)^{-1} = N$$

Бұдан $\mu = \mu(T, V, N)$ анықтауға болады, ал ол өз кезегінде жүйенің макрокүйін сипаттау үшін T, V, μ айнымалыларынан T, V, N айнымалыларына көшуге мүмкіндік береді. Жүйенің макроскопиялық сипаттамалары үйреншікті жолмен есептеледі (2.13 бөлімін қараңыз). Сонымен, **ішкі энергия** үшін

$$E = \Omega + TS + \mu N = \sum_l f_l^{(F-D)} \varepsilon_l,$$

аламыз. Негізі, бұны Ферми Дирак таралу функциясының $f_l^{(F-D)} = \bar{n}_l$ мағынасынан да алуымызға болар еді. $T = 0$ кезіндегі оның түрі - **Ферми энергиясы** деп аталатын, $\varepsilon = \varepsilon_F = \mu$, энергиясына сәйкес келетін баспалдақ тәріздес болады. 9-суретте $f_l^{(F-D)}(\varepsilon_l)$ функциясының әртүрлі температурадағы және тұрақты μ кезінде қалай жүретіні көрсетілген.

$f_l^{(F-D)} = \bar{n}_l$ (59) Ферми Дирак таралу функциясы. Әртүрлі температура кезінде.



7-сурет.

Бозе-бөлшектері статистикасы. Бозе-Энштейн таралуы

Бозондар үшін $n_l = 0, 1, 2, \dots$ Сондықтан,

$$\sum_{n_l=0}^{\infty} e^{\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}} n_l = \left(1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}} \right)^{-1}, \quad \Omega = kT \sum_l \ln \left(1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}} \right)$$

Бозе-Энштейн таралу функциясы деп

$$f_l^{(B-E)} = -\frac{\partial \Omega_l}{\partial \mu} = \left(\exp \left(\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT} \right) - 1 \right)^{-1} = \bar{n}_l \quad (60)$$

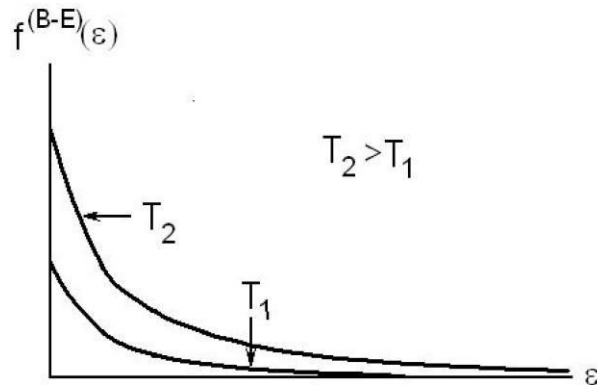
функциясын атайды. Оның физикалық мағынасы l - ші бірбөлшекті күйдегі бөлшектердің орташа санын білдіреді. Барлық температураларда $n_l \geq 0$ болғандықтан, $\exp \left(\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT} \right) \geq 1$ және $\mu \leq \varepsilon_l$, демек, μ ең төменгі ($\mu \leq \varepsilon_0$) бірбөлшекті деңгейден де асып кете алмайды. Ал келесі қатынасты Бозе Энштейн таралуының нормалау шарты дейді:

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_l \left(\exp \left(\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT} \right) - 1 \right)^{-1} = \sum_i g_i \left(\exp \left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT} \right) - 1 \right)^{-1} = N$$

Бұдан $\mu = \mu(T, V, N)$ анықтауға болады, ал ол өз кезегінде жүйенің макрокүйін сипаттау үшін T, V, μ айнымалыларынан T, V, N айнымалыларына көшуге мүмкіндік береді. Жүйенің макроскопиялық сипаттамалары үйреншікті жолман есептеледі (2.13 бөлімін қараңыз). Жүйенің ішкі энергиясы үшін

$$E = \Omega + TS + \mu N = \sum_l f_l^{(B-E)} \varepsilon_l,$$

Негізі, мұны Бозе-Энштейн таралу функциясының $f_l^{(B-E)} = \bar{n}_l$ мағынасынан да алуымызға болар еді. 10-суретте $f_l^{(B-E)}(\varepsilon_l)$ функциясының әртүрлі температурадағы және тұрақты μ кезінде қалай жүретіні көрсетілген.



8- сурет.

$f_l^{(B-E)} = \bar{n}_l$ (60) Ферми Дирак таралу функциясы. Әртүрлі температура кезінде.

$T = 0$ кезінде барлық бозондар энергиясы жағынан ең төменгі жағынан бірбөлшекті күйде болады. Бұл құбылыс **бозе-эйнштейн конденсациясы** деп аталады.

Максвелл – Больцман таралуы

$$\exp\left(\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT}\right) \gg 1 \quad \text{болсын, яғни } \mu \ll \varepsilon_0 - kT. \text{ Онда } \overline{n_l} \ll 1 \text{ және}$$

$$f_l^{(B-E)} \approx f_l^{(F-D)} \approx \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_l}{kT}\right) = A \exp\left(-\frac{\varepsilon_l}{kT}\right) \equiv f_l^{(M-B)}.$$

Мұндай таралу **Максвелл – Больцман** (немесе жай Больцман) **таралуы** деп аталады. Бұл шекті жағдайда бөлшектердің біртектілігіне байланысты болған кванттық қасиеттері жоғала бастайды да, фермиондардың да бозондардың да идеал газдары бірдей қасиетке ие болады.

Больцман статистикасын пайдалануға болатын жағдайларды бағалап көрелік. Мысал үшін идеал бірбөлшекті газды қарастырайық. Бұл жағдайда

$$l \sim \mathbf{p}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}, \quad \sum_l \sim \int \frac{V}{h^3} d\mathbf{p}.$$

Нормалау шартынан келесіні табамыз:

$$A \frac{V}{h^3} \int \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mkT}\right) d\mathbf{p} = N, \quad A = \frac{h^3 n}{(2\pi mkT)^{3/2}}, \quad n = \frac{N}{V}. \quad (61)$$

Кванттық қасиеттерін көрсететін газдарды **ыдыраған** (вырожденный) **газ** деп атайды. Күшті ыдыраудың **критеріі** $A \geq 1$, ал әлсіз ыдыраудың критеріі (ыдыраудың жоқтығы) - $A \ll 1$. (61)-ден көріп отырғанымыздай, n тығыздығының көптігі, T температурасының төмендігі, бөлшектердің m массасының аздығы күшті ыдырау критеріінің орындалуына себеп болады.

$n \approx 10^{28}$, $T = 300$ К ($h = 6.63 \times 10^{-34}$ Дж·с, $k = 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К)

болсын делік, онда біратомды газдар үшін ($m \approx 10^{-26}$ кг) $A \approx 10^{-5}$, яғни оларды бөлме температураларында ыдырамаған ретінде қабылдауға болады.

($m \approx 10^{-30}$ кг) металлдардағы электрондар үшін $A \approx 10$ екенін аламыз, яғни, олар бөлме температурасында да күшті ыдыраған газ болып табылады.

Кванттық статистикалық физикада бірдей бөлшектердің қасиеттерін сипаттау үшін олардың спиніне және толқындық функциясының симметриясына байланысты әртүрлі статистикалық таралу заңдары қолданылады.

Бірдей бөлшектер екі негізгі топқа бөлінеді. Жартылай бүтін спинге ие бөлшектер фермиондар деп аталады және олар Ферми–Дирак статистикасына бағынады. Бүтін спинді бөлшектер бозондар деп аталады және олардың күйдегі таралуы Бозе–Эйнштейн статистикасымен сипатталады.

Ал бөлшектердің кванттық ерекшеліктерін елемеуге болатын жағдайда классикалық Максвелл–Больцман статистикасы қолданылады.

Бұл үш таралу заңын салыстыру статистикалық физиканың маңызды міндеттерінің бірі болып табылады. Олардың арасындағы айырмашылық әсіресе температура төмен және бөлшектердің концентрациясы жоғары болған жағдайда айқын байқалады.

Ферми-бөлшектері статистикасы. Ферми–Дирак таралуы. Фермиондар — спині жартылай бүтін болатын бөлшектер. Оларға электрондар, протондар және нейтрондар жатады. Фермиондардың басты ерекшелігі — олардың антисимметриялы толқындық

функцияға ие болуы.

Екі бірдей фермионның орындарын ауыстырған кезде олардың толық толқындық функциясы таңбасын өзгертеді:

$$\Psi(q_2, q_1) = -\Psi(q_1, q_2)$$

Осы қасиеттен Паули принципі шығады. Паули принципі бойынша екі бірдей фермион бір кванттық күйде бір мезгілде бола алмайды.

Бұл ерекшелік фермиондардың энергетикалық деңгейлер бойынша таралуына тікелей әсер етеді. Егер белгілі бір энергетикалық күйді бір фермион алып тұрса, дәл сол кванттық сипаттамалары бар екінші фермион сол күйге орналаса алмайды.

Фермиондардың энергетикалық күйлер бойынша таралуын Ферми–Дирак функциясы сипаттайды:

$$f(E) = 1 / [\exp((E - \mu)/(k_B T)) + 1]$$

Бұл функция энергиясы E болатын кванттық күйдің орташа толу санын көрсетеді. Мұнда μ — химиялық потенциал, T — абсолют температура, k_B — Больцман тұрақтысы.

Формуладағы «+1» таңбасы фермиондарға тән. Ол Паули принципінің статистикалық таралу заңында көрінуін қамтамасыз етеді.

Температура абсолют нөлге жақындағанда фермиондар ең төменгі энергетикалық күйлерді толтыра бастайды. Энергия деңгейлері төменнен жоғары қарай біртіндеп толады. Белгілі бір шекке дейінгі күйлер толтырылған, ал одан жоғары күйлер бос болады. Бұл шек Ферми энергиясы деп аталады. $T = 0$ кезінде таралу функциясы идеалданған түрде былай сипатталады:

$$f(E) = 1, E < E_F$$

және

$$f(E) = 0, E > E_F$$

Мұндағы E_F — Ферми энергиясы.

Температура нөлден жоғары болған кезде бөлшектердің жылулық қозғалысы күшейеді. Соның нәтижесінде Ферми деңгейінің маңындағы кейбір бөлшектер жоғары энергиялы күйлерге өте алады. Бірақ Паули принципі барлық жағдайда сақталады.

Ферми–Дирак статистикасының маңызды мысалы — металдардағы электрондық газ. Металдағы еркін электрондарды төмен температурада классикалық газ ретінде қарастыруға болмайды, себебі электрондардың кванттық қасиеттері маңызды рөл атқарады. Фермиондардың статистикасы электрондық газдан басқа ақ ергежейлі жұлдыздардағы электрондық газды, нейтрондық жұлдыздардағы нейтрондық ортаны және басқа да тығыз кванттық жүйелерді сипаттауда қолданылады.

Бозе-бөлшектері статистикасы. Бозе–Эйнштейн таралуы
Бозондар — спині бүтін сан болатын бөлшектер. Мысалы, фотонның спині 1-ге тең. Бозондардың толқындық функциясы симметриялы болады:

$$\Psi(q_2, q_1) = +\Psi(q_1, q_2)$$

Бұл жағдайда бөлшектердің орындарын ауыстыру толқындық функцияның таңбасын өзгертпейді. Фермиондардан айырмашылығы, бозондарға Паули принципі қолданылмайды. Сондықтан көптеген бозондар бір кванттық күйде бір уақытта орналаса алады. Бозондардың энергетикалық күйлер бойынша таралуын Бозе–Эйнштейн функциясы сипаттайды:

$$f(E) = 1 / [\exp((E - \mu)/(k_B T)) - 1]$$

Мұнда μ — химиялық потенциал. Формуладағы «-1» таңбасы бозондарға тән статистикалық ерекшелікті көрсетеді.

Бозе–Эйнштейн статистикасының маңызды ерекшелігі — төмен температурада бөлшектердің ең төменгі энергетикалық күйге көптеп жинақталуы мүмкіндігі.

Бұл құбылыс Бозе–Эйнштейн конденсациясы деп аталады. Жүйенің температурасы белгілі бір критикалық мәннен төмендегенде бөлшектердің едәуір бөлігі негізгі кванттық күйге өтеді. Бозе–Эйнштейн конденсациясы кезінде микроскопиялық кванттық қасиеттер

макроскопиялық деңгейде байқалатын болады. Сондықтан бұл құбылыс кванттық статистиканың ең маңызды нәтижелерінің бірі болып саналады. Фотондық газ да бозондық статистикаға бағынады. Фотондардың саны жүйеде тұрақты сақталмайтындықтан, тепе-тендік жағдайда фотондардың химиялық потенциалы $\mu = 0$ болады.

Сонда фотондар үшін Бозе–Эйнштейн таралуы

$$f(E) = 1 / [\exp(E/(k_B T)) - 1]$$

түрінде жазылады.

Бұл таралу қара дененің сәуле шығару заңын түсіндіруде маңызды орын алады. Фотондардың энергиясы $E = h\nu$ немесе $E = \hbar\omega$ түрінде өрнектелетіндіктен, Бозе–Эйнштейн статистикасы электромагниттік сәулеленудің спектрлік қасиеттерін сипаттауға мүмкіндік береді.

Максвелл–Больцман таралуы. Максвелл–Больцман статистикасы классикалық статистикалық физикаға жатады. Ол бөлшектердің кванттық қасиеттері елеусіз болған кезде қолданылады.

Классикалық жағдайда бөлшектердің бір кванттық күйге орналасуын шектейтін Паули принципі сияқты талап болмайды. Сонымен қатар бозондарға тән бір күйге көп бөлшектің кванттық жинақталуы да ескерілмейді.

Максвелл–Больцман таралуы энергиясы E болатын күйдің салыстырмалы ықтималдығын экспоненциалды түрде береді:

$$f(E) \propto \exp(-E/(k_B T))$$

Нормаланған түрде белгілі бір энергия деңгейінің ықтималдығы

$$p_i = \exp(-E_i/(k_B T)) / Z$$

түрінде жазылады.

Мұнда E_i — i -күйдің энергиясы, ал Z — статистикалық қосынды:

$$Z = \sum_i \exp(-E_i/(k_B T))$$

Максвелл–Больцман таралуының физикалық мағынасы қарапайым: энергиясы аз күйлердің ықтималдығы жоғары, ал энергиясы жоғары күйлердің ықтималдығы төмен болады. Температура артқан кезде жоғары энергиялы күйлердің толу ықтималдығы да артады.

Идеал газ молекулаларының жылдамдықтар бойынша таралуы Максвелл таралуымен сипатталады. Молекулалардың жылдамдығы артқан сайын олардың кинетикалық энергиясы өседі, сондықтан өте жоғары жылдамдықты бөлшектердің саны азаяды.

Максвелл жылдамдықтар таралуының ықтималдық тығыздығы $f(v) = 4\pi \cdot (m/(2\pi k_B T))^{3/2} \cdot v^2 \cdot \exp(-mv^2/(2k_B T))$ түрінде жазылады.

Бұл өрнек газ молекулаларының жылдамдықтары бірдей болмайтынын көрсетеді. Молекулалардың белгілі бір бөлігі төмен жылдамдықпен, көпшілігі орташа жылдамдықтар аймағында, ал аз бөлігі өте жоғары жылдамдықпен қозғалады.

Температура жоғарылаған кезде молекулалардың орташа кинетикалық энергиясы артады. Сондықтан таралу қисығы жоғары жылдамдықтар аймағына қарай ығысады.

Үш статистиканың өзара байланысы

Ферми–Дирак, Бозе–Эйнштейн және Максвелл–Больцман таралуларының арасындағы айырмашылықты олардың негізгі формулалары арқылы салыстыруға болады.

Ферми–Дирак:

$$f_{FD}(E) = 1 / [\exp((E - \mu)/(k_B T)) + 1]$$

Бозе–Эйнштейн:

$$f_{BE}(E) = 1 / [\exp((E - \mu)/(k_B T)) - 1]$$

Максвелл–Больцман:

$$f_{MB}(E) \propto \exp(-(E - \mu)/(k_B T))$$

Ферми–Дирак таралуындағы «+1» фермиондардың Паули принципіне бағынатынын

көрсетеді. Бозе–Эйнштейн таралуындағы «-1» бозондардың бір кванттық күйде көптеп орналасуына мүмкіндік беретінін сипаттайды. Ал Максвелл–Больцман таралуында бұл кванттық түзетулер болмайды.

Кванттық таралулардың классикалық шекке өтуі. Ферми–Дирак және Бозе–Эйнштейн таралулары белгілі бір жағдайда Максвелл–Больцман таралуына жуықтайды. Егер

$$\exp((E - \mu)/(k_B T)) \gg 1$$

болса, онда «+1» және «-1» мүшелерінің әсері салыстырмалы түрде аз болады. Сондықтан екі кванттық таралу да шамамен

$$f(E) \approx \exp(-(E - \mu)/(k_B T))$$

түріне келеді.

Бұл жағдай бөлшектердің тығыздығы аз және температура жеткілікті жоғары болған кезде орындалады. Мұндай жағдайда газды классикалық идеал газ ретінде қарастыруға болады.

Ал температура төмендегенде немесе бөлшектердің концентрациясы жоғарылаған кезде кванттық әсерлер күшейеді. Сол кезде Максвелл–Больцман статистикасын қолдану жеткіліксіз болып, жүйенің табиғатына сәйкес Ферми–Дирак немесе Бозе–Эйнштейн статистикасын пайдалану қажет.

Бақылау сұрақтары:

- 1) Қандай бөлшектерді фермиондар деп атаймыз?
- 2) Ферми–Дирак таралуын жазыңыз.
- 3) Қандай бөлшектерді бозондар деп атаймыз?
- 4) Бозе–Эйнштейн таралуын жазыңыз.
- 5) Фермиондар дегеніміз қандай бөлшектер және олардың толқындық функциясы қандай қасиетке ие?
- 6) Ферми–Дирак таралуы қалай жазылады және оның физикалық мағынасы қандай?
- 7) Бозондар дегеніміз қандай бөлшектер және олардың толқындық функциясы фермиондардан қалай ерекшеленеді?
- 8) Бозе–Эйнштейн таралуының негізгі ерекшелігі қандай және Бозе–Эйнштейн конденсациясы қалай түсіндіріледі?
- 9) Максвелл–Больцман таралуы қандай жағдайда қолданылады және оның Ферми–Дирак пен Бозе–Эйнштейн таралуларымен байланысы қандай?

Пайдаланған әдебиеттер: негізгі әдебиет – [1-7], қосымша әдебиет [1-3].