

Дәріс № 4 Дисперсия, физикалық шамалардың орташа квадраттық және салыстырмалы флуктуациясы

Дәріс жоспары: 1) Дисперсия.
2) Физикалық шамалардың орташа квадраттық флуктуациясы.
3) Салыстырмалы флуктуация.

$A(q, p)$ статистикалық ансамблде $\rho(q, p)$ таралу функциясымен сипатталатын әртүрлі мәндер қабылдайтын қандайда бір физикалық шама болсын. (q және p мәндері әртүрлі болған жағдайда). Оның статистикалық ансамбль бойынша орташа мәнін есептеуге болады.

Флуктуация (ауытқу) деп мына физикалық шама аталады:

$$\Delta A(q, p) = A(q, p) - \bar{A}$$

$A(q, p)$ шамасының дисперсиясы, оның флуктуация квадратының орташа мәніне тең шама:

$$D_A = \overline{(\Delta A)^2} = \overline{A^2} - 2\bar{A} \cdot \bar{A} + \bar{A}^2 = \overline{A^2} - \bar{A}^2$$

Дисперсия квадратының түбірі $\sigma_A = \sqrt{D_A}$ орташа квадраттық флуктуация (ауытқу) деп аталады.

Орташа квадраттық флуктуацияның физикалық шаманың орташа мәніне қатынасы **салыстырмалы флуктуация** деп аталады:

$$\delta_A = \frac{\sigma_A}{\bar{A}}$$

Макроскопиялық жүйелерді үлкен n саннан тұратын макроскопиялық ішкі жүйелерге бөлейік те, оларды l ($l = 1, 2 \dots n$) индекстерімен нөмірлейік. Олар квазитұйықталған және статистикалық квазитәуелсіз. Физикалық шама аддитивті деп аталады, егер

$$A(q, p) = \sum_{l=1}^n A_l(q_l, p_l)$$

формуладағы $A_l(q_l, p_l)$ сол ішкі жүйедегі шамасына сәйкес физикалық шама болса. Көптеген физикалық шамалар аддитивті болып табылады, мысалы, энергия (ішкі жүйелердің әсерлесу энергиясын ескермейтін болсақ), импульс, импульс моменті және т.б.

Орташа мәнін есептейік:

$$\bar{A} = \sum_{l=1}^n \bar{A}_l = n \cdot a$$

Бұл жерде ішкі жүйелерді бірдей, яғни $A_l = a$
Осылай дисперсияны да есептейік:

$$D_A = \overline{(A - \bar{A})^2} = \overline{\left(\sum_l (A_l - a)\right)^2} = \sum_{ll} (A_l - a)(A_l - a) = \sum_l \overline{(A_l - a)^2} = n b^2$$

Бұл жерде біз теңемес,

$$(\bar{A}_l - a)(\bar{A}_l - a) = (\bar{A}_l - a)(A_l - a) = (a - a)(a - a) = 0$$

және $\overline{(A_l - a)^2} = b^2$ деп белгілейміз, себебі барлық ішкі жүйелер бірдей. Қатыстық флуктуация үшін мына өрнекті аламыз:

$$\delta_A = \frac{\sqrt{nb^2}}{na} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{b\sqrt{N_0}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}; \delta_A \sim \frac{1}{\sqrt{N}};$$

Мұндағы $N_0 = N/n$ ішкі жүйедегі бөлшектер саны. Макроскопиялық жүйелер үшін $N \sim 10^{22}$ және $\delta A \sim 10^{-11}$.

Кез келген аддитивті шаманың қатыстық флуктуациясы макроскопиялық жүйедегі бөлшектер санының квадратына кері пропорционал кемиді. Сондықтан бұл шама уақытқы байланысты тұрақты деп саналады және өзінің салыстырмалы мәніне тең. (уақыт бойынша орташа немес статистикалық ансамбль бойынша орташа мәніне тең)

Статистикалық физикада макроскопиялық жүйені сипаттайтын физикалық шамалардың көпшілігі тұрақты бір мәнге ие болмайды. Микроскопиялық деңгейде бөлшектер үздіксіз қозғалыста болғандықтан, жүйенің энергиясы, қысымы, температурасы және басқа да шамалары белгілі бір орташа мәндің маңында өзгеріп отырады. Мұндай кездейсоқ өзгерістер **флуктуациялар** деп аталады. Алдыңғы дәрісте физикалық шаманың статистикалық орташа мәні қарастырылды. Егер қандай да бір физикалық шама A әртүрлі мәндер қабылдайтын болса, оның орташа мәні:

$$\langle A \rangle = \int A(q,p) \rho(q,p) dq dp$$

Мұндағы:

$\langle A \rangle$ — A физикалық шамасының статистикалық орташа мәні;

$A(q,p)$ — фазалық кеңістіктің берілген нүктесіндегі физикалық шаманың мәні;

$\rho(q,p)$ — статистикалық таралу функциясы;

$dq dp$ — фазалық кеңістіктің элементар көлемі.

Алайда тек орташа мәнді білу физикалық шаманың нақты мәндерінің орташа мәндің маңында қаншалықты өзгередінін толық сипаттамайды. Сондықтан флуктуация шамасын сандық түрде сипаттау үшін **дисперсия** енгізіледі. Физикалық шаманың дисперсиясы оның мәнінің орташа мәннен ауытқуының квадратының орташа мәні ретінде анықталады:

$$D(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

Мұндағы:

$D(A)$ — A шамасының дисперсиясы;

A — физикалық шаманың нақты мәні;

$\langle A \rangle$ — A шамасының орташа мәні;

$A - \langle A \rangle$ — шаманың орташа мәннен ауытқуы.

Дисперсияны түрлендіріп жазуға болады:

$$D(A) = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

Мұндағы:

$\langle A^2 \rangle$ — A шамасының квадратының орташа мәні;

$\langle A \rangle^2$ — A шамасының орташа мәнінің квадраты.

Бұл өрнек статистикалық физикада өте маңызды. Ол флуктуацияның шамасын есептеу үшін жиі қолданылады. Дисперсия әрқашан теріс емес: $D(A) \geq 0$.

Егер $D(A) = 0$ болса, онда A шамасы барлық уақытта өзінің орташа мәніне тең болады және флуктуация болмайды: $A = \langle A \rangle$.

Ал $D(A)$ неғұрлым үлкен болса, физикалық шаманың орташа мәндің маңындағы шашырауы соғұрлым үлкен болады. Дисперсияның өлшем бірлігі A шамасының өлшем бірлігінің квадратына тең. Мысалы, егер A энергия болса, дисперсияның өлшем бірлігі Дж² болады. Сондықтан флуктуацияның өзін сипаттау үшін дисперсиядан гөрі оның квадрат түбірін қолдану ыңғайлы.

Физикалық шамалардың орташа квадраттық флуктуациясы. Физикалық шаманың орташа мәнінен ауытқуын:

$$\delta A = A - \langle A \rangle$$

деп белгілейік. Мұндағы:

δA — A шамасының флуктуациясы, яғни оның орташа мәннен ауытқуы;

A — физикалық шаманың нақты мәні;

$\langle A \rangle$ — физикалық шаманың орташа мәні.

Флуктуацияның орташа мәні нөлге тең:

$$\langle \delta A \rangle = 0.$$

Мұндағы: $\langle \delta A \rangle$ — флуктуацияның орташа мәні. Бұл нәтижені тікелей көрсетуге болады:

$$\langle \delta A \rangle = \langle A - \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0.$$

Демек, флуктуацияның таңбасы оң да, теріс те болуы мүмкін. Орташа мәннен жоғары ауытқулар мен төмен ауытқулар статистикалық тұрғыдан бірін-бірі компенсациялайды. Сондықтан флуктуацияның нақты шамасын сипаттау үшін ауытқудың квадраты алынады:

$$(\delta A)^2 = (A - \langle A \rangle)^2.$$

Оның орташа мәні дисперсияға тең:

$$D(A) = \langle (\delta A)^2 \rangle.$$

Физикалық шаманың **орташа квадраттық флуктуациясы** немесе **орташа квадраттық ауытқуы** дисперсияның квадрат түбірі арқылы анықталады:

$$\Delta A = \sqrt{D(A)}$$

немесе

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}.$$

Мұндағы:

ΔA — A шамасының орташа квадраттық флуктуациясы;

$D(A)$ — A шамасының дисперсиясы;

$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ — ауытқудың квадратының орташа мәні.

Бұл шаманың маңызды ерекшелігі — оның өлшем бірлігі A физикалық шамасының өлшем бірлігімен бірдей. Мысалы, егер A — энергия болса, ΔA Дж-мен, егер A — көлем болса, ΔA м³-мен, ал қысым болса, ΔA Па-мен өлшенеді. Орташа квадраттық флуктуация физикалық шаманың өзінің орташа мәніне қатысты қаншалықты шашырайтынын көрсетеді. Мысалы, екі жүйеде де қысымның орташа мәні бірдей болуы мүмкін:

$\langle p \rangle = 10^5$ Па.

Бірақ бірінші жүйеде $\Delta p = 10^2$ Па, ал екінші жүйеде $\Delta p = 10^4$ Па болуы мүмкін. Бұл жағдайда екінші жүйедегі қысымның флуктуациясы әлдеқайда үлкен болады. Статистикалық физикада флуктуацияларды зерттеудің негізгі себебі — макроскопиялық жүйелердің микроскопиялық құрылымын олардың өлшенетін макроскопиялық қасиеттері арқылы түсіндіру. Мысалы, газдың қысымы молекулалардың ыдыс қабырғасымен соқтығысуынан пайда болады. Әрбір соқтығысу кезінде берілетін импульс әртүрлі болғандықтан, қысымның лездік мәні үздіксіз өзгеріп тұрады. Бірақ молекулалар саны өте көп болғандықтан, бұл өзгерістердің салыстырмалы шамасы өте аз болады.

Салыстырмалы флуктуация. Физикалық шаманың абсолюттік флуктуациясы ΔA жүйенің масштабына тәуелді болуы мүмкін. Сондықтан әртүрлі жүйелерді салыстыру кезінде тек абсолюттік флуктуацияны пайдалану жеткіліксіз. Осы мақсатта **салыстырмалы флуктуация** енгізіледі. Салыстырмалы флуктуация орташа квадраттық флуктуацияның физикалық шаманың орташа мәніне қатынасы арқылы анықталады:

$\delta A_{\text{сал}} = \Delta A / \langle A \rangle$.

Мұндағы:

$\delta A_{\text{сал}}$ — A шамасының салыстырмалы флуктуациясы;

ΔA — орташа квадраттық флуктуация;

$\langle A \rangle$ — физикалық шаманың орташа мәні.

Дисперсия арқылы:

$\delta A_{\text{сал}} = \sqrt{D(A)} / \langle A \rangle$.

Ал дисперсияның анықтамасын пайдалансақ:

$\delta A_{\text{сал}} = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} / \langle A \rangle$.

Бұл шама өлшемсіз болады. Салыстырмалы флуктуацияны пайызбен де көрсетуге болады:

$\delta A_{\text{сал}}(\%) = [\Delta A / \langle A \rangle] \cdot 100\%$.

Мұндағы:

$\delta A_{\text{сал}}(\%)$ — салыстырмалы флуктуацияның пайыздық мәні;

ΔA — орташа квадраттық флуктуация;

$\langle A \rangle$ — орташа мән.

Салыстырмалы флуктуацияның физикалық мағынасы өте маңызды. Ол физикалық шаманың өзінің орташа мәнімен салыстырғанда қаншалықты өзгертетінін көрсетеді. Егер

$\delta A_{\text{сал}} \ll 1$, болса, онда флуктуация өте аз және физикалық шаманы іс жүзінде тұрақты деп қарастыруға болады. Мұндағы:

$\delta A_{\text{сал}}$ — салыстырмалы флуктуация;

« $\ll 1$ » — шаманың бірге қарағанда өте кіші екенін білдіреді. Макроскопиялық жүйелер үшін салыстырмалы флуктуациялар, әдетте, өте аз болады. Бұл статистикалық физиканың маңызды нәтижелерінің бірі.

Флуктуацияның бөлшектер санына тәуелділігі. Макроскопиялық жүйелердегі флуктуациялардың ерекшелігін түсіну үшін жүйедегі бөлшектер санының рөлін қарастыру қажет. Жүйеде бөлшектер саны N неғұрлым көп болса, статистикалық орташалану соғұрлым күшті болады. Көптеген тәуелсіз шамалар үшін салыстырмалы флуктуацияның шамасы жуық түрде:

$\delta A_{\text{сал}} \sim 1 / \sqrt{N}$ заңдылығына бағынады. Мұндағы:

$\delta A_{\text{сал}}$ — салыстырмалы флуктуация;

N — жүйедегі бөлшектер саны. Бұл өрнек макрокопиялық жүйелердегі статистикалық заңдылықтардың неге өте жақсы орындалатынын түсіндіреді. Мысалы, жүйеде $N \approx 10^{23}$ бөлшек болса: $1 / \sqrt{N} \approx 10^{-11}$. Демек, салыстырмалы флуктуация өте аз болады. Осыған байланысты макрокопиялық денелердің қысымы, көлемі, энергиясы сияқты шамалары тәжірибеде іс жүзінде тұрақты болып көрінеді. Шын мәнінде, микрокопиялық деңгейде олар үнемі флуктуацияланады, бірақ бұл өзгерістердің салыстырмалы мөлшері өте аз болғандықтан, оларды күнделікті тәжірибеде байқамаймыз. Бұл жағдай **макрокопиялық тұрақтылықтың статистикалық табиғатын** көрсетеді.

Флуктуациялардың статистикалық физикадағы маңызы. Флуктуация ұғымы статистикалық физиканың негізгі түсініктерінің бірі болып табылады. Себебі кез келген макрокопиялық жүйе көптеген микрокопиялық бөлшектерден тұрады және олардың қозғалысы кездейсоқ сипатқа ие. Жүйенің макрокопиялық шамалары осы микрокопиялық қозғалыстардың орташа нәтижесі ретінде қалыптасады. Мысалы:

температура бөлшектердің орташа кинетикалық қозғалысымен;

қысым бөлшектердің қабырғамен соқтығысуымен;

ішкі энергия бөлшектердің қозғалысы мен өзара әсерлесуімен байланысты.

Осы шамалардың нақты лездік мәндері орташа мәндерден ауытқып отырады. Сондықтан статистикалық физикада физикалық шаманың орташа мәнімен қатар оның флуктуациясын да қарастыру қажет. Флуктуацияларды зерттеу арқылы жүйенің тепе-теңдік күйінің тұрақтылығын, өлшеу дәлдігін және микрокопиялық процестердің макрокопиялық салдарын бағалауға болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Флуктуация дегеніміз не және оның физикалық мағынасы қандай?
2. Дисперсия дегеніміз не?
3. Физикалық шаманың дисперсиясы қандай формуламен анықталады?
4. Дисперсияны $D(A) = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ түрінде қалай алуға болады?
5. Физикалық шаманың флуктуациясы $\delta A = A - \langle A \rangle$ формуласымен қалай анықталады?