Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

№3 БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ (БӨЖ)

БУЛЬ ФУНКЦИЯЛАРЫ. БУЛЬ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ АҚИҚАТТЫҚ КЕСТЕСІ. БІР ЖӘНЕ ЕКІ АЙНЫМАЛЫ БУЛЬ ФУНЦИЯЛАРЫ.

БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫН ОРЫНДАУ ҮЛГІСІ

Берілгендер:

№1 тапсырмаға:

f(x,y,z)=(x∧y)∨(¬x∧z)$f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(\neg x\wedge z)$

№2 тапсырмаға:

fn=f3 (импликация, векторы 1110 0110) және fk=f5 (екі модульді қосу, векторы 1100 0111).

Суперпозиция: h(x,y)=f3(f5(x,y),y)

№3 тапсырмаға:

f(x,y,z)=(x∨y)∧(x∨¬z)∧(y∨z)

№4 тапсырмаға:

Формула f(x,y,z)=(x∧¬y)∨(y∧z)∨(¬x∧¬z)

№1 тапсырма. Ақиқаттық кестесін құру

Берілген функция:

$f(x,y,z)=(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$ $f(x,y,z)=(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$

Шешуі: Үш айнымалы үшін $2^3=8$ жол. x, y, z-дің барлық комбинациясын жазып, әрбір жолдағы мәнді есептейміз.

x	y	z	¬x	x∧y	¬x∧z	f = (x∧y) ∨ (¬x∧z)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

Ақиқаттық кесте (екілік вектор):

f=(0,1,0,1,0,0,1,1)

немесе жолдар бойынша жоғарыдағы кесте.

№2 тапсырма. Суперпозициядан h(x,y) кестесі

Берілген:

f3(x,y)=x→y (импликация), векторы 1110 0110 – бұл 4 жолдық кесте (x,y реті: 00,01,10,11).

Тексерейік:

Импликация: 0→0=1, 0→1=1, 1→0=0, 1→1=1 ⇒ (1,1,0,1) – бірақ берілген вектор 1110 0110 8 бит?

Қарапайым екі айнымалы функция 4 бит болуы керек. Файлдағы жазба «f3(1110 0110)» – мүмкін бұл 8 биттік вектор емес, 4 биттік екі жарты? Немесе ол 4 биттік векторды екі рет жазылған? Нақтылау үшін стандартты анықтамаларды қолданамыз. Көп жағдайда екі айнымалы функциялар 4 битпен беріледі. Сондықтан мен келесі стандартты векторларды аламын:

Нақты логикалық функциялардың анықтамасы бойынша:

f3(x,y)=x→y ≡ (¬x ∨ y) → векторы (1,1,0,1) → 1101 емес, 1110?

Қайта қарайық:

x=0,y=0: 1; 0,1:1; 1,0:0; 1,1:1 → 1,1,0,1 = 1101 (ондық 13). Бірақ файлда 1110 0110 – бұл екі 4-бит: 1110 және 0110.

Мүмкін 8 жолды кесте?

Екі айнымалы 4 жол, сондықтан мен стандартты түсіндіруді ұсынамын: f3=1101, f5 (екі модульді қосу, XOR) = 0110 (x=0,y=0:0; 0,1:1; 1,0:1; 1,1:0 → 0110).

Бұл дұрыс.

Сондықтан:

f3(a,b)=a→b вектор (1,1,0,1) яғни 1101

f5(a,b)=a⊕b (XOR) → вектор (0,1,1,0) яғни 0110

Суперпозиция: h(x,y)=f3(f5(x,y),y)

Қадам 1: u=f5(x,y)=x⊕y

Қадам 2: h=f3(u,y)=u→y

Кесте:

x	y	$u = x \oplus y$	$h = (u \rightarrow y)$
0	0	0	$0 \rightarrow 0 = 1$
0	1	1	$1 \rightarrow 1 = 1$
1	0	1	$1 \rightarrow 0 = 0$
1	1	0	$0 \rightarrow 1 = 1$

Нәтиже: h(x,y) векторы: (1, 1, 0, 1) → 1101 (яғни f3-ке тең).

Жауап:

h(0,0)=1, h(0,1)=1, h(1,0)=0, h(1,1)=1. Кесте жоғарыда.

№3 тапсырма. Маңызды және жалған айнымалыларды анықтау

Берілген:

$f(x,y,z)=(x \vee y) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (y \vee z)$

Шешуі:

Бір айнымалының жалған (фиктивті) екендігін тексеру үшін, оның мәні өзгергенде f өзгермейтінін көрсету керек.

1. x-тің маңыздылығын тексеру:

Екі жағдайды салыстырамыз: $f(0,y,z)$ және $f(1,y,z)$.

Егер $x=0$: $f(0,y,z)=(0 \vee y) \wedge (0 \vee \neg z) \wedge (y \vee z) = y \wedge \neg z \wedge (y \vee z)$

$= y \wedge \neg z \wedge (y \vee z) = (y \wedge \neg z \wedge y) \vee (y \wedge \neg z \wedge z) = (y \wedge \neg z) \vee 0 = y \wedge \neg z.$

Егер $x=1$: $f(1,y,z)=(1 \vee y) \wedge (1 \vee \neg z) \wedge (y \vee z) = 1 \wedge 1 \wedge (y \vee z) = y \vee z$

Енді y,z-тің кейбір мәндерінде бұл екі өрнек әртүрлі мән береді: Мысалы, $y=0$, $z=0$: $x=0 \rightarrow 0 \wedge 1=0$; $x=1 \rightarrow 0 \vee 0=0$ (бірдей). $y=0$, $z=1$: $x=0 \rightarrow 0 \wedge 0=0$; $x=1 \rightarrow 0 \vee 1=1$ (әртүрлі). Демек, x – маңызды.

2. у-ті тексеру:

f(x,0,z) және f(x,1,z) салыстырамыз.

f(x,0,z) = (x∨0)∧(x∨¬z)∧(0∨z) = x ∧ (x∨¬z) ∧ z = x ∧ z (себебі x∧(x∨¬z)=x).

f(x,1,z) = (x∨1)∧(x∨¬z)∧(1∨z) = 1 ∧ (x∨¬z) ∧ 1 = x∨¬z.

Мысалы, x=1, z=0: f(1,0,0)=1∧0=0; f(1,1,0)=1∨1=1 → әртүрлі. у – маңызды.

3. z-ті тексеру:

f(x,y,0) және f(x,y,1).

f(x,y,0) = (x∨y)∧(x∨1)∧(y∨0) = (x∨y)∧1∧y = (x∨y)∧y = y (себебі y∧(x∨y)=y).

f(x,y,1) = (x∨y)∧(x∨0)∧(y∨1) = (x∨y)∧x∧1 = (x∨y)∧x = x.

Мысалы, x=0, y=1: f(0,1,0)=1; f(0,1,1)=0 → әртүрлі. z – маңызды.

Барлық айнымалылар маңызды. Функцияны ықшамдау:

f(x,y,z) = (x∨y) ∧ (x∨¬z) ∧ (y∨z).

Қасиеттерді қолданамыз: (A∨B)∧(A∨C) = A∨(B∧C).

Сонда: (x∨y)∧(x∨¬z) = x ∨ (y∧¬z).

Сонда: f = [x ∨ (y∧¬z)] ∧ (y∨z) = (x∧(y∨z)) ∨ ((y∧¬z)∧(y∨z))

= (x∧y) ∨ (x∧z) ∨ (y∧¬z∧y) ∨ (y∧¬z∧z)= (x∧y) ∨ (x∧z) ∨ (y∧¬z) ∨ 0.

Осыны әрі қарай ықшамдау: (x∧y)∨(x∧z) = x∧(y∨z). Сонда:

f = x∧(y∨z) ∨ (y∧¬z). Бұл ең қарапайым ДНҚ.

Тек маңызды айнымалыларды қамтитын формула:

f(x,y,z)=(x∧(y∨z))∨(y∧¬z)

№4 тапсырма. Формула бойынша кесте, жалған айнымалылар

Берілген:

$f(x,y,z)=(x\wedge\neg y)\vee(y\wedge z)\vee(\neg x\wedge\neg z)$

1. Ақиқаттық кестесі:

x	y	z	¬y	¬x	¬z	x∧¬y	y∧z	¬x∧¬z	f
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
Вектор: f=(1,0,1,1,1,1,0,1)*f*=(1,0,1,1,1,1,0,1)									

2. Жалған айнымалыларды табу:

x жалған ба? x=0 және x=1 кезіндегі мәндерді салыстырамыз (y,z тіркелген).

x=0: (0, ¬y, z) → f(0,y,z) = (0) ∨ (y∧z) ∨ (1∧¬z) = (y∧z) ∨ ¬z.

x=1: f(1,y,z) = (1∧¬y) ∨ (y∧z) ∨ (0) = ¬y ∨ (y∧z) = ¬y ∨ z

(себебі¬y∨(y∧z)=¬y∨z).

Енді y=0, z=0: f(0,0,0)=0∨1=1; f(1,0,0)=1∨0=1 (бірдей);

y=0, z=1: f(0,0,1)=0∨0=0; f(1,0,1)=1∨1=1 (әртүрлі). Демек, x – маңызды.

y жалған ба?

f(x,0,z) = (x∧1) ∨ (0) ∨ (¬x∧¬z) = x ∨ (¬x∧¬z) = x ∨ ¬z.

f(x,1,z) = (x∧0) ∨ (1∧z) ∨ (¬x∧¬z) = z ∨ (¬x∧¬z) = z ∨ ¬x

(себебі z∨(¬x∧¬z)=z∨¬x).

Мысалы, x=0, z=0: f(0,0,0)=0∨1=1; f(0,1,0)=0∨1=1;

x=1, z=0: f(1,0,0)=1∨1=1; f(1,1,0)=0∨0=0 → 1≠0. y – маңызды.

z жалған ба?

f(x,y,0) = (x∧¬y) ∨ (0) ∨ (¬x∧1) = (x∧¬y) ∨ ¬x = ¬x ∨ (x∧¬y) = ¬x ∨ ¬y.

f(x,y,1) = (x∧¬y) ∨ (y∧1) ∨ (¬x∧0) = (x∧¬y) ∨ y = x ∨ y (себебі y∨(x∧¬y)=x∨y).

Мысалы, x=0, y=0: f(0,0,0)=1∨1=1; f(0,0,1)=0∨0=0 → әртүрлі. z – маңызды.

Барлық айнымалылар маңызды. Жалған айнымалы жоқ.

3. Формуланы ықшамдау (жалған айнымалы болмағандықтан, эквивалентті ықшамдалған формула):

f(x,y,z)=(x∧¬y)∨(y∧z)∨(¬x∧¬z)$f(x,y,z)=(x\wedge\neg y)\vee(y\wedge z)\vee(\neg x\wedge\neg z)$

Карта немесе алгебралық түрлендіру:

f = (x∧¬y) ∨ (y∧z) ∨ (¬x∧¬z).

Бұл функция үшін ең қарапайым

ДНҚ: ¬x∨(x∧¬y)∨(y∧z)¬$x\vee(x\wedge\neg y)\vee(y\wedge z)$ – бірақ дәл осы күйінде қалдырамыз, себебі ықшамдау мүмкін емес.

Тексерейік: Бұл функция 1-ші бағандағы кестемен сәйкес келеді.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0

$f_1(x,y)$ — конъюнкция

$f_2(x,y)$ — дизъюнкция

$f_3(x,y)$ — $x \to y$ импликация

$f_4(x,y)$ — $y \to x$ импликация

$f_5(x,y)$ — екі модульді қосу

$f_6(x,y)$ — эквиваленция

$f_7(x,y)$ —Шеффер штрихы

$f_8(x,y)$ — Пирс бағытшасы

$f_9(x,y)$ — $x \not\to y$ тыйым салу

$f_{10}(x,y)$ — $y \not\to x$ тыйым салу

БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ

Жеке орындау жұмысы №1

Берілген f(x,y,z) буль функцияның кестесін құрыңыз.

№	$f(x,y,z)$
1	$x+y\wedge z\to\bar{x}\vee\bar{z}$
2	$(x\mid y)\to\bar{z}\wedge y+x$
3	$(x\to\bar{y})+z\vee x$
4	$x\vee y+\bar{z}\leftrightarrow y$
5	$x\vee\overline{y\to z}+y$
6	$\bar{x}\vee y\to z\wedge y$
7	$(x\downarrow y)\vee\overline{x\to z}$
8	$(x\wedge y\to z)\vee x+y$
9	$(x\mid y)\wedge z\to\bar{y}\vee x$
10	$(x\to y\wedge z)+\bar{x}$
11	$x\vee y\wedge\bar{z}\to x\wedge y$
12	$(x+y)+(z\vee\bar{x})$
13	$x\vee y+z\to\bar{y}$
14	$(x\downarrow y)+z\vee\bar{x}$
15	$(x\vee y\to\bar{z})+y$

№	$f(x,y,z)$
16	$x \leftrightarrow y + z \vee \overline{y}$
17	$x \vee y \wedge \overline{z} + y$
18	$(x + y) \wedge z \vee \overline{x}$
19	$(x \rightarrow \overline{y}) + (z \vee y)$
20	$(x \mid y) \wedge z \vee \overline{x}$
21	$(x \rightarrow y) + z \leftrightarrow \overline{y}$
22	$(x \downarrow y) \leftrightarrow z + y$
23	$(x \vee y) + z \rightarrow y$
24	$x \wedge y + z \rightarrow \overline{x}$
25	$(x + (y \downarrow z)) + y$
26	$\overline{x \rightarrow y} \vee \overline{y} + z$
27	$(x \mid y) + (y \rightarrow z \wedge \overline{x})$
28	$\overline{x \rightarrow y} \wedge (x \vee \overline{y} + z)$
29	$y + z \leftrightarrow z \wedge x \vee x$
30	$x \wedge \overline{y \rightarrow z} \leftrightarrow \overline{y} + z$

Жеке орындау жұмысы №2

f_n және f_k функцияларының суперпозициясы болатын h(x,y) функциясының кестесін жазыңыз, егер

f_1(1001 0111), f_2(0110 1011),
f_3(1110 0110), f_4(0111 0011),
f_5(1100 0111), f_6(1001 0100),
f_7(1011 0101), f_8(1000 0110),
f_9(1010 0110), f_{10}(0101 1000).

№	n	k	$h(x,y)$
1	1	2	$f_n(x,f_k(x,x,y),y)$
2	2	1	$f_n(x,f_k(y,x,y),x)$
3	1	2	$f_n(y,f_k(x,y,x),x)$
4	3	5	$f_n(x,f_k(y,x,y),y)$
5	3	2	$f_n(y,f_k(x,y,x),x)$
6	4	3	$f_n(x,f_k(y,y,x),y)$
7	2	3	$f_n(x,f_k(x,y,y),y)$
8	5	2	$f_n(y,x,f_k(x,x,y))$
17	7	8	$f_n(y,f_k(x,y,x),y)$
18	5	9	$f_n(x,f_k(y,x,x),y)$
19	5	10	$f_n(y,f_k(x,y,x),x)$
20	10	9	$f_n(x,f_k(x,x,y),y)$
21	10	5	$f_n(f_k(x,x,y),y,x)$
22	7	9	$f_n(f_k(y,y,x),x,y)$
23	8	7	$f_n(f_k(x,y,y),y,x)$

№	n	k	$h(x,y)$
9	5	4	$f_n(f_k(x,y,y),x,y)$
10	3	2	$f_n(x,x,f_k(x,y,y))$
11	4	3	$f_n(x,y,f_k(y,x,y))$
12	2	4	$f_n(x,f_k(x,y,y),y)$
13	5	7	$f_n(x,y,f_k(y,x,x))$
14	9	8	$f_n(y,y,f_k(x,y,x))$
15	7	5	$f_n(x,y,f_k(x,y,y))$
16	8	7	$f_n(x,x,f_k(y,x,y))$
24	7	8	$f_n(f_k(x,y,x),x,y)$
25	6	7	$f_n(f_k(y,y,x),y,x)$
26	9	2	$f_n(x,f_k(y,y,x),y)$
27	2	10	$f_n(x,y,f_k(x,y,x))$
28	3	9	$f_n(f_k(y,y,x),x,x)$
29	10	7	$f_n(y,x,f_k(x,y,x))$
30	8	3	$f_n(x,f_k(y,y,x),y)$

Жеке орындау жұмысы №3

Берілген функция үшін f(x,y,z)

1. Оның айнымалыларының қайсысы маңызды, қайсысы жалған екенін анықтаңыз.
2. f(x,y,z) тек маңызды айнымалыларды қамтитын формуламен өрнектеңіз.

№	$f(x,y,z)$
1	1011 1011
2	0011 1100
3	0101 1111
4	1000 1000

№	$f(x,y,z)$
5	1010 0000
6	1100 1111
7	0010 0010
8	1100 0011

№	$f(x,y,z)$
9	0000 1010
10	1001 1001
11	0101 0000
12	1100 1100

13	0100 0100
14	1111 0011
15	0000 0101
16	0000 0011
17	0011 0000
18	1101 1101

19	1111 0101
20	0111 0111
21	1010 0101
22	0011 0011
23	1011 1011
24	1111 1100

25	0110 0110
26	1010 1111
27	1010 1010
28	1110 1110
29	0001 0001
30	0011 1111

Жеке орындау жұмысы №4

1. Формула арқылы берілген логикалық f(x,y,z) функциясының кестесін жазыңыз.
2. Осы функцияның жалған айнымалыларын табыңыз.
3. Осы формуланы жалған айнымалылары жоқ эквивалентке түрлендіріңіз.

№	$f(x,y,z)$	№	$f(x,y,z)$
1	$x\bar{y}z \vee \overline{\bar{x} \vee y \vee z} \vee x\bar{y} \vee x\bar{y}\bar{z}$	10	$xy\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y} \vee \overline{x \vee \bar{y}}$
2	$x y \bar{z} \vee y z \vee \bar{x} \vee \overline{x \vee y \vee z}$	11	$x y \bar{z} \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} \vee y\bar{z} \vee \bar{x} y\bar{z}$
3	$x y \bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee x y z$	12	$\bar{x}\bar{y} z \vee x \bar{y} \vee yz \vee \overline{x \vee y \vee z}$
4	$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \overline{x \vee y} \vee \bar{x}\bar{y} z \vee \overline{x \vee y \vee z}$	13	$\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x} y z \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee x y z$
5	$\bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y \vee \overline{x \vee y \vee z}$	14	$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \overline{y \vee z} \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee x\bar{y}\bar{z}$
6	$\bar{x} y \bar{z} \vee \overline{x \vee \bar{y}} \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} \vee \bar{x} y z$	15	$x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} z \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{y} z$
7	$x\bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \overline{\bar{x} \vee y} \vee \bar{x} y z$	16	$\bar{x}\bar{y} z \vee \overline{y \vee \bar{z}} \vee x \bar{y} z \vee \overline{x \vee y \vee \bar{z}}$
8	$x y z \vee \bar{y} z \vee x\bar{z} \vee \overline{x \vee y \vee z}$	17	$x y \bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} z \vee \overline{\bar{y} \vee z} \vee x \bar{y} z$
9	$xy\bar{z} \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee xyz \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z}$	18	$x y z \vee x\bar{z} \vee \bar{x} y \vee \overline{x \vee y \vee z}$

№	$f(x,y,z)$	№	$f(x,y,z)$
19	$\bar{x}yz \vee \overline{\bar{z}} \vee y \vee xyz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee \bar{z}}$	25	$\bar{x}y \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{z} \vee \overline{x \vee y \vee z}$
20	$\bar{x}yz \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \overline{y \vee \bar{z}}$	26	$\bar{x}\bar{y}z \vee \overline{x \vee z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \overline{x \vee y \vee z}$
21	$\bar{x}yz \vee \overline{x \vee y \vee \bar{z}} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$	27	$\bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee x\bar{y}\bar{z}$
22	$\overline{x \vee y \vee z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee \overline{x \vee y \vee z}$	28	$x\bar{y}z \vee \bar{x}y \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee \bar{y}z$
23	$\bar{x}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee \overline{x \vee y \vee z}$	29	$x\bar{y}z \vee \overline{x \vee z} \vee \overline{x \vee y \vee z} \vee xyz$
24	$\bar{x}\bar{y}z \vee \overline{x \vee z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \overline{x \vee y \vee z}$	30	$x\bar{y}z \vee xy \vee \overline{\bar{x} \vee z} \vee \bar{x}z$

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

