Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Тәжірибелік сабақ 11

Графтағы байланыстылық. Графтардың түрлері

ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Негізгі математикалық анықтамалар
2. Байланыстылықтың математикалық негізі
3. Байланыстылықты матрицалық әдістермен зерттеу
4. Ағаштардың математикалық қасиеттері
5. Екібөлікті графтардың математикалық сипаттамасы
6. Байланыстылық компоненттерінің саны
7. Бағытты графтардағы байланыстылық
8. Граф инварианттары және изоморфизм

Мысал 1:

V={1,2,3,4},

E={(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)} - төртбұрыш

Мысал 2: $V=\{a,b,c\}$, $E=\{(a,b),(b,c)\}$ - қарапайым граф

Мысал 3: K_3 үш төбелі толық граф:

$V=\{1,2,3\}$,

$E=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Мысал 4: Толық граф параметрлерін есептеу есебі

K_8 толық графы үшін:

а) Қырлар санын табыңыз

б) Әр төбенің дәрежесін табыңыз

в) Графтың диаметрін табыңыз

Шешу жолы:

а) Қырлар саны: $|E|=n(n-1)/2=56/2=28$

б) Әр төбенің дәрежесі: Толық графта әр төбе қалған барлық төбелермен байланысқан:

$$\deg(v)=n-1=7.$$

в) Диаметр:

Толық графта кез келген екі төбенің арасында тікелей байланыс бар:

диаметр=1

Тексеру: Қолсалу леммасы бойынша:

$$\sum \deg(v)=8\times 7=56=2\times 28$$

Байланысқан граф

Мысал: Төбелері A, B, C, D және қырлары AB, BC, CD, DA болатын төртбұрыш. Кез келген екі төбеге оған жетуге болады. Бұл байланысқан граф.

Байланыспаған граф

Мысал: Төбелері A, B, C, D болатын граф. A және B төбелері қырлармен байланысқан, C және D төбелері де байланысқан, бірақ {A, B} тобы {C, D} тобымен байланыспаған. Бұл граф екі байланысқан компоненттен тұрады.

Күшті байланысқан граф (Багажды графтар үшін)

Мысал: Үш төбелі цикл: A→B, B→C, C→A. Кез келген төбеден кез келген төбеге баруға және оралуға болады.

Әлсіз байланысқан граф

Мысал: A→B, C→B бағытты графы. Бағыттарды алып тастағанда, A, B, C төбелері байланысқан болады. Бірақ A-дан C-ге баруға жол жоқ, сондықтан ол күшті байланысқан емес, тек әлсіз байланысқан.

Мысал 5:

Графта $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ болса, онда 1 ден 4 ке дейінгі жол: 1-2-3-4.

Мысал 6: Үш төбелі толық граф K_3:

Төбелер: 1, 2, 3

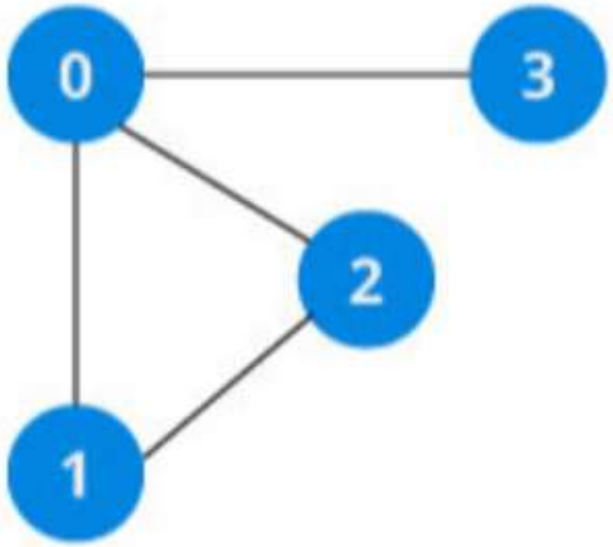
Қырлар: (1,2), (1,3), (2,3)

Көршілес матрицасы: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Түсіндіру:

- a_{12}=1, себебі 1-ші және 2-ші төбелер арасында қыр бар;
- a_{11}=0, себебі ілмек жоқ;
- a_{23}=1, себебі 2-ші және 3-ші төбелер арасында қыр бар.

Мысал 7: Төмендегі суретте график және оның эквивалентті көршілестік матрицасы көрсетілген.



	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0

Бағытсыз график жағдайында матрица диагональ бойынша симметриялы болады, өйткені әрбір қырдың (i, j) шеті де (j, i) болады.

Мысал 8: Байланыстылықты тексеру есебі

Төмендегі граф байланысқан ба?

V = {A, B, C, D, E}

E = {AB, BC, CD, AE}

Шешу жолы:

1-әдіс: Көршілес матрицасы арқылы

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	1
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	0
E	1	0	0	0	0

Мысал 9: Бағытты цикл $\vec{C}_3$:

Төбелер: 1, 2, 3

Қырлар: 1→2, 2→3, 3→1

Көршілес матрицасы: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Түсіндіру:

a_{12}=1, себебі 1→2 қыры бар;

a_{21}=0, себебі 2→1 қыры жоқ;

a_{31}=1, себебі 3→1 қыры бар.

Мысал 10: K_3 графы үшін $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

A^2 есептейік:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Түсіндіру:

- $a_{11}^{(2)}=2$: 1-ші төбеден 1-ші төбеге 2 ұзындықтағы 2 жол бар (1→2→1 және 1→3→1);
- $a_{12}^{(2)}=1$: 1-ші төбеден 2-ші төбеге 2 ұзындықтағы 1 жол бар (1→3→2).

A^3 есептейік:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Мысал 11: C_3 үшін:

$$I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (I + A)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} > 0$$

Мысал 12: Байланысқан графты тексеру:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4 \text{ төбелі жол})$$

$$I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (I + A)^3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Қорытынды: Граф байланысқан.

Мысал 13: Салмақты граф:

Төбелер: A, B, C

Қырлар: AB=3, AC=5, BC=2

Көршілес матрицасы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Мысал 14: Ілмектері бар граф

Төбелер: 1, 2

Қырлар: (1,1), (1,2), (2,2)

Көршілес матрицасы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Мысал 15: K_3 графының спектрі $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1$$

Спектр: {2, -1, -1}

Мысал 16: 5 төбелі ағаш:

$|E|=4$, листтер саны≥ 2

Мысал 17: Ағаштың қасиеттерін тексеру есебі

Төмендегі граф ағаш бола ма?

$V = \{1,2,3,4,5\}$

$E = \{12, 23, 34, 45, 51\}$

Шешу жолы:

1-қадам: Циклды тексеру

- Графта цикл бар: 1-2-3-4-5-1

2-қадам: Қырлар санын тексеру

- Төбелер саны: n = 5
- Ағаш үшін: |E| = n - 1 = 4
- Берілген графта: |E| = 5 ≠ 4

3-қадам: Матрицалық әдіс

Лаплас матрицасы:

```
L = [
    [2, -1, 0, 0, -1],
    [-1, 2, -1, 0, 0],
    [0, -1, 2, -1, 0],
    [0, 0, -1, 2, -1],
    [-1, 0, 0, -1, 2]
]
```

Лаплас матрицасының рангісі: rank(L)=4

Ағаш үшін: rank(L) = n - 1 = 4 болуы керек, бірақ цикл бар

Жауап: Граф ағаш емес, себебі циклы бар және қырлар саны n-1 емес.

Мысал 18: $K_{2,3}$ толық екібөлікті граф:

$V_1=\{1,2\}$,

$V_2=\{3,4,5\}$,

$E=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

Мысал 19: Екібөлікті графты тексеру есебі

Төмендегі граф екібөлікті бола ма?

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{12, 23, 34, 45, 56, 61, 14\}$

1-әдіс: Цикл ұзындығын тексеру

Циклдарды табамыз:

1-2-3-4-1 (ұзындығы 4 - жұп),

1-6-5-4-1 (ұзындығы 4 - жұп)

2-әдіс: Матрицалық әдіс

Көршілес матрицасының спектрін табамыз. Екібөлікті графтарда спектр симметриялы болады.

Жауап: Граф екібөлікті, себебі барлық циклдары жұп ұзындықта.

Мысал 20: Байланыстылық компоненттерін табу есебі

Төмендегі графтың байланыстылық компоненттерін табыңыз:

V = {1,2,3,4,5,6,7,8}

E = {12, 23, 45, 56, 78}

2-әдіс: Лаплас матрицасы арқылы

Лаплас матрицасын құрамыз:

```
L = [
    [1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [-1, 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0, -1, 2, -1, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1]
]
```

Лаплас матрицасының нөлдік кеңістігінің өлшемі компоненттер санына тең:

$$\dim(\ker(L)) = 3$$

Жауап: Графта 3 байланыстылық компоненті бар:

{1,2,3}, {4,5,6}, {7,8}

Мысал 21: Екі компоненттен тұратын граф:

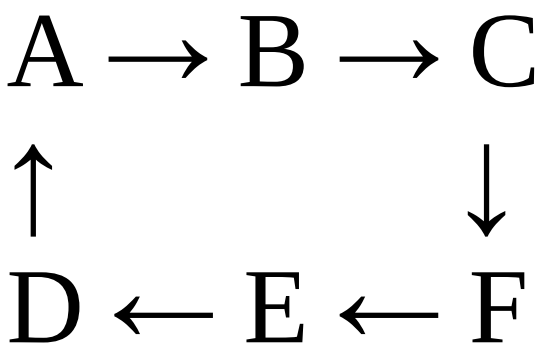
$V=\{1,2,3,4\}$,

$E=\{(1,2),(3,4)\}$

$c(G)=2$,

$|V|-|E|=4-2=2\leq 2\leq 4$

Мысал 22:



Бұл граф әлсіз байланысқан, себебі A ден F ке тікелей жол жоқ.

Мысал 23:

$G_1=(V_1,E_1)$ және $G_2=(V_2,E_2)$ изоморфты ма?

Шешу әдісі:

1. Инварианттарды салыстыру
2. Бирциялық сәйкестік іздеу
3. Каноникальды формаға келтіру

Мысал 24: Граф изоморфизмін тексеру есебі

Төмендегі екі граф изоморфты ма?

G1: V={1,2,3,4}, E={12,23,34,41}

G2: V={A,B,C,D}, E={AB,BC,CD,DA}

Шешу жолы:

1-әдіс: Инварианттарды салыстыру

Төбелер саны: 4 = 4 ✓

Қырлар саны: 4 = 4 ✓

Дәрежелер тізбегі: G1: (2,2,2,2), G2: (2,2,2,2) ✓

2-әдіс: Изоморфизмдік сәйкестік табу

f: G1 → G2 изоморфизмі:

f(1)=A, f(2)=B, f(3)=C, f(4)=D

Тексеру:

1-2 → A-B ✓

2-3 → B-C ✓

3-4 → C-D ✓

4-1 → D-A ✓

3-әдіс: Матрицалық әдіс

Көршілес матрицалары бірдей (төбелердің реттелуіне байланысты)

Жауап: Графтар изоморфты.

Мысал 25:

C_4 және $K_{2,2}$ изоморфты:

C_4: V={1,2,3,4}, E={(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)}

$K_{2,2}$: V={a,b,c,d}, E={(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)}

Изоморфизм: $1 \to a$, $2 \to c$, $3 \to b$, $4 \to d$

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков С.Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — Санкт Петербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

