Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Тәжірибелік сабақ 10

Графтар теориясының негізгі ұғымдары. Графтар түрлері. Графтарға қолданылатын амалдар

ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Кіріспе.
2. Негізгі ұғымдар.
3. Графтар түрлері.
4. Графтарға қолданылатын амалдар.
5. Мысалдар.

Мысал 1: Графта төбе мен қырын көрсету.

V = {A, B, C, D} (Төбелер)

E = {(A,B), (A,C), (B,C), (C,D)} (қырлар)

Граф:

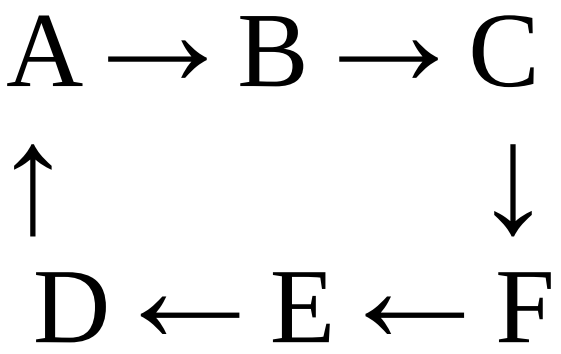


A, B, C, D - Төбелер (нүктелер);

Сызықтар - қырлар (байланыстар), әрбір қыры екі төбені байланыстырады.

Мысал 2: Графта иықты көрсету.

1. Қарапайым бағытталған граф



Иықтар тізімі:

(A, B) - A-дан B-ға

(B, C) - B-дан C-ға

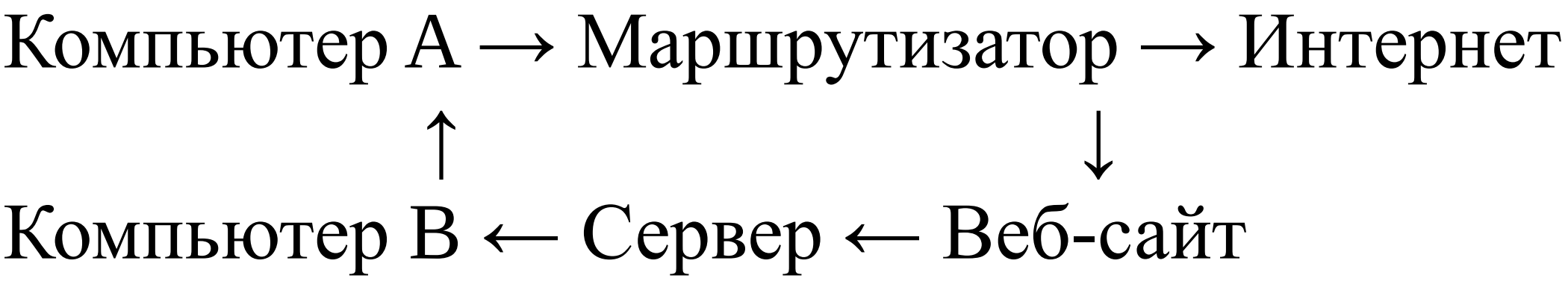
(C, F) - C-дан F-ға

(F, E) - F-дан E-ге

(E, D) - E-ден D-ге

(D, A) - D-ден A-ға

2. Бір бағытты желі мысалы



Иықтар тізімі:

- (Компьютер А, Маршрутизатор)
- (Маршрутизатор, Интернет)
- (Веб-сайт, Сервер)
- (Сервер, Компьютер В)
- (Маршрутизатор, Веб-сайт)

3. Тапсырмалар ағыны мысалы

Тапсырмалар кезегі:

Тапсырма 1 → Өңдеу → Тексеру → Дайын

↑ ↓

Тапсырма 2 ← Қайта іздеу ← Қате

Иықтың практикалық қолданылу мысалдары

1. Жолдар желісі

Астана → Караганды

↑ ↓

Кокшетау ← Павлодар

Түсіндірме:

- Астанадан Карагандыға бара аласыз
- Карагандыдан Павлодарға бара аласыз
- Павлодардан Кокшетауға бара аласыз
- Кокшетаудан Астанаға бара аласыз

2. Өндіріс процесі

Шикізат → Өңдеу → Жиналғы → Сапа → Дайын өнім

↑ ↓

Қайта өңдеу ← Ақаулы ← Тест

2. Қаржы ағыны

Клиент → Төлем → Банк → Есеп → Компания

↑ ↓

Растау ← Чек ← Транзакция ← Есептеу

Мысал 3:

Граф:



Дәрежелерді есептеу:

- deg(A) = 2 (B және C)
- deg(B) = 3 (A, C, D)
- deg(C) = 3 (A, B, E)
- deg(D) = 1 (B)
- deg(E) = 1 (C)

Мысал 4:

Граф:

1---2

| |

4---3

Order (G)=4 (4 төбе бар)

Мысал 5:

Граф:

A---B

| \ |

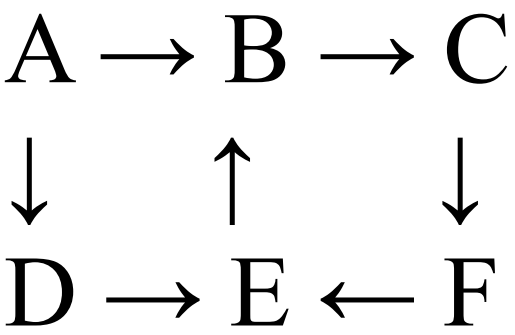
D---C

Size (G) = 5 (AB, AC, AD, BC, CD қырлар)

Иықтармен жұмыс мысалдары

1. Дәреже есептеу

Граф:



Шығу дәрежесі (out-degree):

out(A) = 2 (B, D)

out(B) = 1 (C)

out(C) = 1 (F)

out(D) = 1 (E)

out(E) = 1 (B)

out(F) = 1 (E)

Кіру дәрежесі (in-degree):

in(A) = 0

in(B) = 2 (A, E)

in(C) = 1 (B)

in(D) = 1 (A)

in(E) = 2 (D, F)

in(F) = 1 (C)

2. Жол табу

Граф:

Үй → Дүкен → Мектеп

↓ ↓

Парк ← Кино

А-дан В-ға жолдар:

Үй → Дүкен → Мектеп

Үй → Парк ← Кино (жол жоқ)

Үй → Дүкен → Кино → Парк

Иықтарды қолданатын алгоритмдер

1. Ең қысқа жол табу

Бастапқы нүкте → ... → Мақсатты нүкте

2. Топологиялық сұрыптау

Курс 1 → Курс 2 → Курс 3

3. Ағындар талдауы

Көз → Тарту → Өңдеу → Шығару

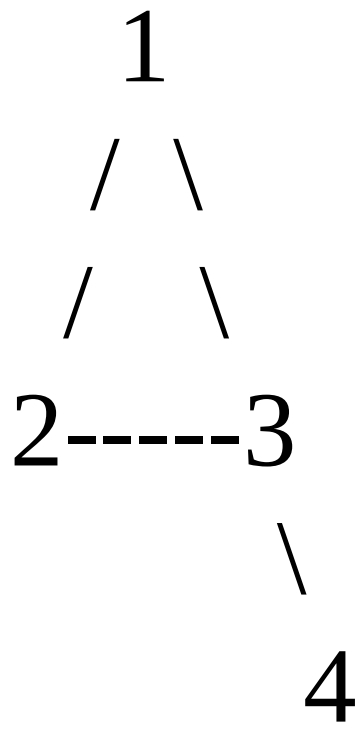
Мысал 6.

Берілген деректер:

Төбелер: {1, 2, 3, 4}

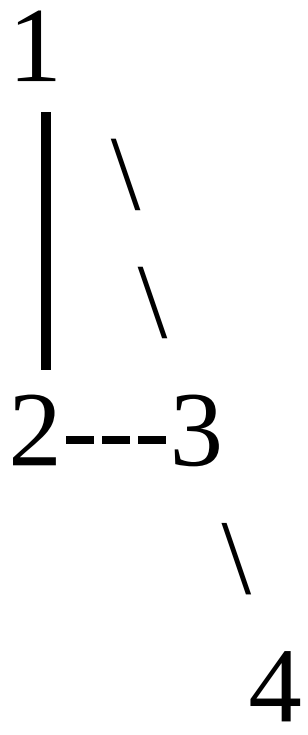
Қырлар: {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}

Граф сызбасы:

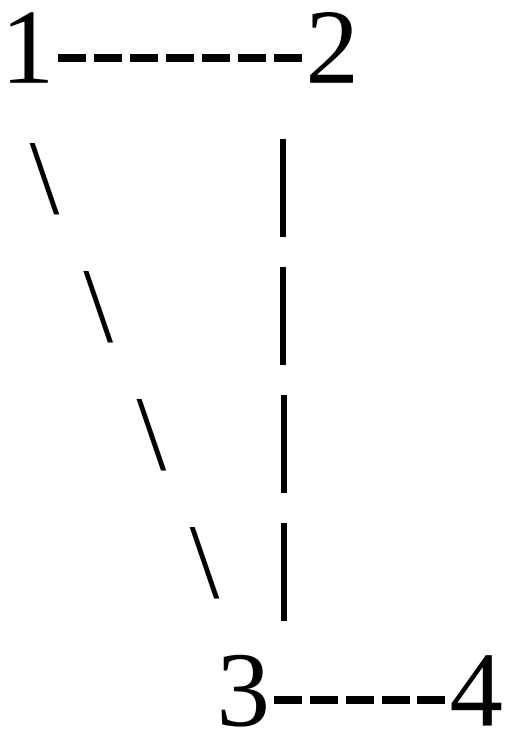


Графтың баламалы сызбалары.

Нұсқа 1:



Нұсқа 2:



Талдау

1. Қарапайым граф екендігін тексеру:

Ілмектер жоқ:

1-1, 2-2, 3-3, 4-4 жоқ

Ешбір төбе өзімен байланыспайды

Параллель қырлар жоқ:

1-2: тек бір қыры

1-3: тек бір қыры

2-3: тек бір қыры

3-4: тек бір қыры

Ешбір төбе жұбы арасында екі қыры жоқ

2. Граф параметрлері:

Тәртіп (төбелер саны):

|V| = 4 (1, 2, 3, 4)

Өлшем (қырлар саны):

|E| = 4

Дәрежелер (әр төбенің іргелес төбелер саны):

deg(1) = 2 (2 және 3)

deg(2) = 2 (1 және 3)

deg(3) = 3 (1, 2 және 4)

deg(4) = 1 (3)

3. Графтың құрылымы:

Байланысқандық:

- Граф байланысқан (барлық төбелерден бір-біріне жетуге болады)
- Жолдар:
  - $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
  - $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
  - $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

Циклдар:

- 1-2-3-1 циклы бар
- Басқа циклдар жоқ

4. Графтың ішкі бөліктері:

Іргелестік:

1-нің көршілері: {2, 3}

2-нің көршілері: {1, 3}

3-тің көршілері: {1, 2, 4}

4-тің көршілері: {3}

Ішкі графтар:

{1,2,3} - үшбұрыш (толық граф K_3)

{3,4} - жол графы P_2

Мысал 7: Ілмегі бар граф

Төбелер: {A, B}

Қырлар: {(A,B), (A,A)}, мұндағы A-A - ілмек

Мысал 8: Параллель қыры бар граф

Төбелер: {X, Y}

Қырлар: {(X,Y), (X,Y)}, мұндағы екі қыры бірдей

Қарапайым графтың практикалық мысалдары

1. Әлеуметтік желі:

Адамдар: {Айгүл, Бауыржан, Қанат, Дина}

Достық байланыстары:

- Айгүл-Бауыржан
- Айгүл-Қанат
- Бауыржан-Қанат
- Қанат-Дина

2. Компьютерлік желі:

Компьютерлер: {Сервер, Ноутбук, Принтер, Телефон}

Байланыстар:

-Сервер-Ноутбук

-Сервер-Принтер

- Ноутбук-Принтер

- Принтер-Телефон

3. Көшелер желісі:

Қиылысар: {A, B, C, D}

Көшелер:

-A-B көшесі

- A-C көшесі

- B-C көшесі

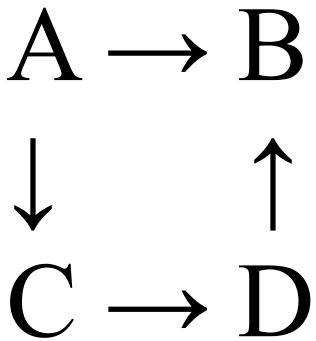
- C-Д көшесі

3.2. Бағытталған граф (Диграф)

- Қырлардың бағыты бар
- (u,v) және (v,u) әртүрлі қырлар

Мысал 9: Бір жаққа қарай жолдар желісі

Мысал 10:



Түсіндірме:

A → B: A-дан B-ға бағыт

A → C: A-дан C-ға бағыт

C → D: C-дан D-ға бағыт

D → B: D-дан B-ға бағыт

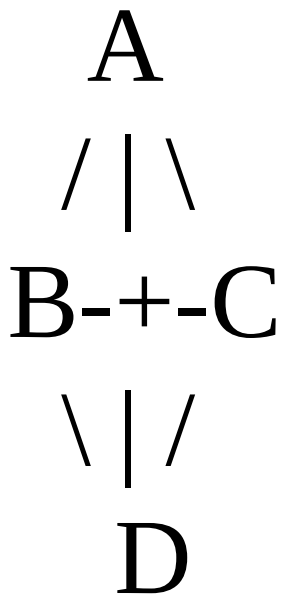
Мысал 11:

Төбелер: {1, 2, 3, 4}

Иықтар: {(1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (2,4)}

Мысал 12: Екі жаққа қарай жолдар желісі

Мысал 13: 4 төбесі бар толық граф K_4



Қырлар саны: $4\times(4-1)/2 = 6$.

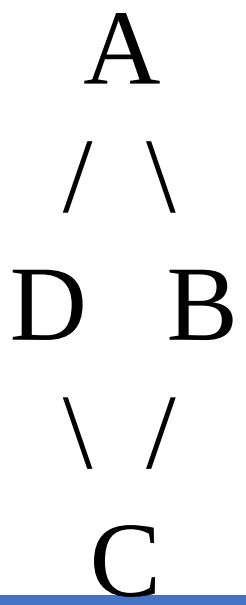
Мысал 14: Қарапайым жинақы графты көрсету.

Берілген деректер:

Төбелер: {A, B, C, D}

Қырлар: {(A,B), (B,C), (C,D), (D,A)}

Граф сызбасы:



Жолдарды тексеру:

Шың жұбы	Жол	Сипаттама
A → B	A-B	Тікелей жол
A → C	A-B-C	2 қыры арқылы
A → D	A-D	Тікелей жол
B → C	B-C	Тікелей жол
B → D	B-C-D	2 қыры арқылы
C → D	C-D	Тікелей жол

Барлық төбе жұптары арасында жол бар → **ЖИНАҚЫ ГРАФ**

Мысал 15: Жинақы графтың ерекше түрі -толық граф.

Берілген деректер:

Төбелер: {X, Y, Z}

Қырлар: {(X,Y), (X,Z), (Y,Z)}

Граф сызбасы:



Әрбір төбе жұбы арасында тікелей жол бар → **ЖИНАҚЫ ГРАФ**

Мысал 16: Жинақы ЕМЕС граф (салыстыру үшін)

Берілген деректер:

Төбелер: {A, B, C, D, E}

Қырлар: {(A,B), (B,C), (D,E)}

Граф сызбасы: A---B---C D---E

Жолдарды тексеру:

A, B, C бір-біріне жетуге болады

D, E бір-біріне жетуге болады

Бірақ A/B/C топтағы төбелерден D/E топтағы төбелерге жол ЖОҚ

Барлық Төбелер бір-біріне жетуге болмайды → **ЖИНАҚЫ ЕМЕС**

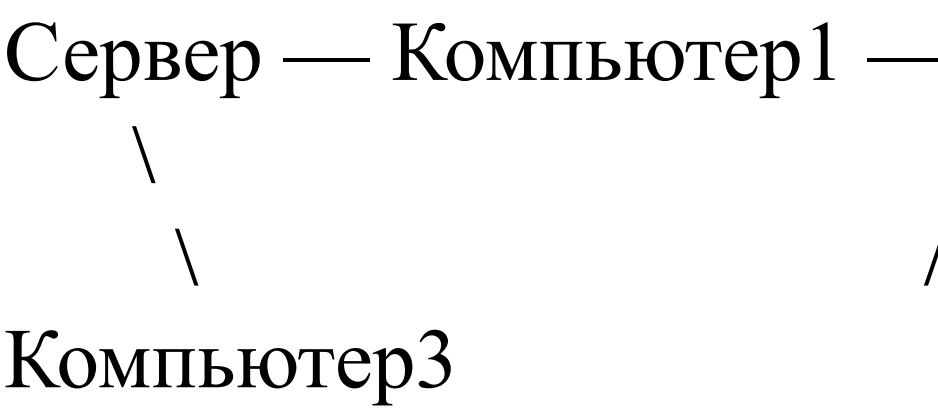
Мысал 17: Практикалық мысалдар

1. Қалалар желісі (жинақы):



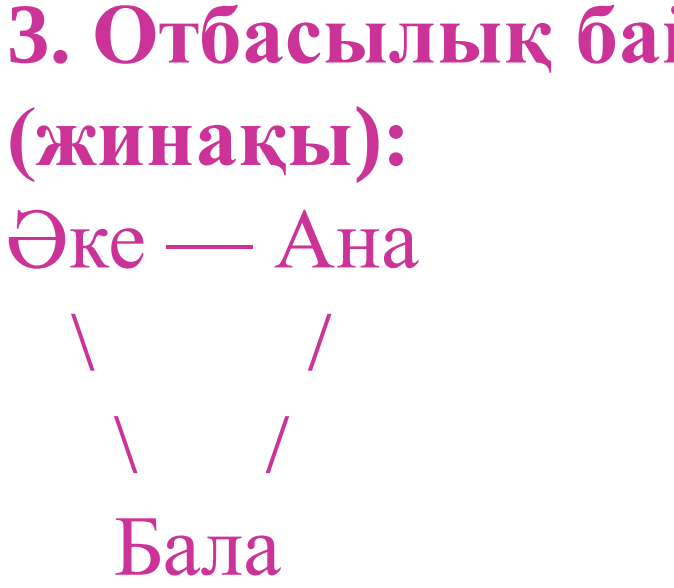
Барлық қалалар арасында жол бар

2. Компьютерлік желі (жинақы):



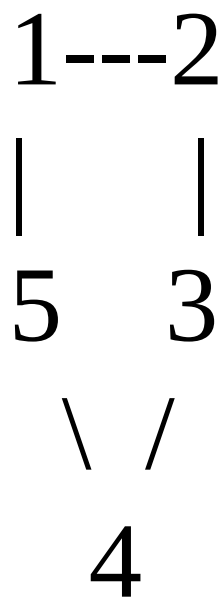
Барлық компьютерлер бір-бірімен байланыса алады

3. Отбасылық байланыс (жинақы):

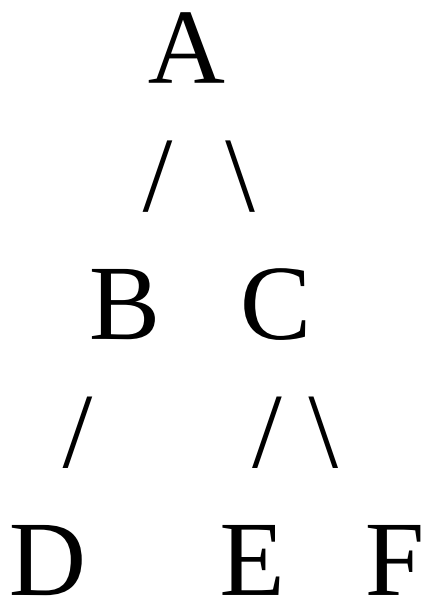


Барлық отбасы мүшелері бір-бірімен байланыста

Мысал 18: C_5 (5 төбесі бар цикл)



Мысал 19:



Ерекшеліктері:

- Кез келген екі төбе арасында дәл бір жол бар;
- n төбесі бар ағашта n-1 қыры бар.

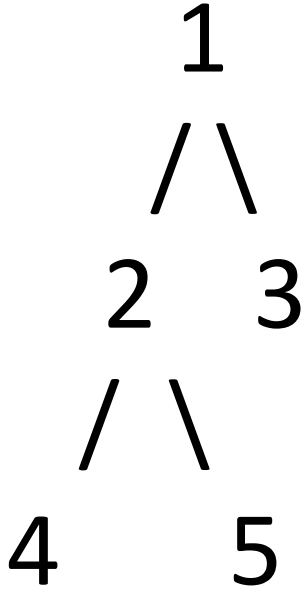
Мысал 20: Ағаш (жинақы графтың ерекше түрі)

Берілген деректер:

Төбелер: {1, 2, 3, 4, 5}

Қырлар: {(1,2), (1,3), (2,4), (2,5)}

Граф сызбасы:



Жолдарды тексеру:

1 → 2: 1-2

1 → 3: 1-3

1 → 4: 1-2-4

1 → 5: 1-2-5

2 → 3: 2-1-3

2 → 4: 2-4

2 → 5: 2-5

3 → 4: 3-1-2-4

3 → 5: 3-1-2-5

4 → 5: 4-2-5

Барлық төбе жұптары арасында жол бар → **ЖИНАҚЫ ГРАФ**

Мысал 21: Қарапайым екібөлімді граф

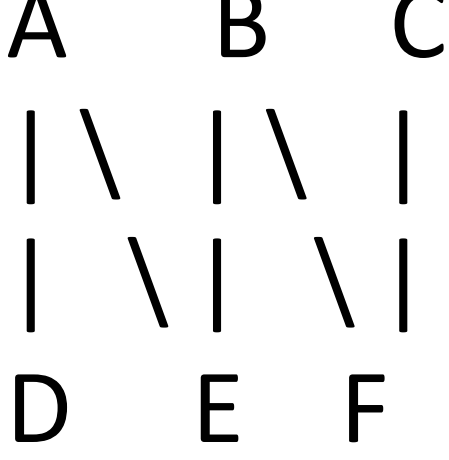
Берілген деректер:

Бірінші жиын: {A, B, C} (ерлер)

Екінші жиын: {D, E, F} (әйелдер)

Қырлар: {(A,D), (A,E), (B,E), (B,F), (C,F)}

Граф сызбасы:



Талдау:

- *Бірінші жиын ішіндегі байланыстар:*
  ЖОҚ (A-B, A-C, B-C жоқ)
- *Екінші жиын ішіндегі байланыстар:*
  ЖОҚ (D-E, D-F, E-F жоқ)
- *Қырлар тек жиындар арасында:*
  A-D, A-E, B-E, B-F, C-F

Мысал 22: Студенттер мен пәндер графы

Берілген деректер:

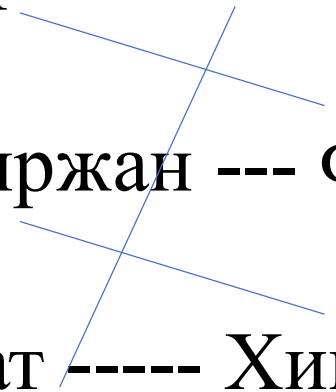
Студенттер: {Айгүл, Бауыржан, Қанат}

Пәндер: {Математика, Физика, Химия}

Қырлар:

- Айгүл: Математика, Физика
- Бауыржан: Физика, Химия
- Қанат: Математика, Химия

Граф сызбасы:



Талдау:

Студенттер арасында байланыс: ЖОҚ

Пәндер арасында байланыс: ЖОҚ

Байланыстар тек студент-пән арасында

Мысал 23: Жұмыс берушілер мен бос орындар

Берілген деректер:

Компаниялар: {Google, Amazon, Microsoft}

Бос орындар: {Программист, Дизайнер, Менеджер}

Қырлар:

- Google: Программист, Менеджер
- Amazon: Программист, Дизайнер
- Microsoft: Дизайнер, Менеджер

Граф сызбасы:



Мысал 24: Екібөлімді емес граф (салыстыру үшін)

Берілген деректер:

- **Төбелер:** {A, B, C, D}
- **Қырлар:** {(A,B), (B,C), (C,D), (A,C)}

Талдау:

- A-B-C үшбұрышы бар (A, B, C бір жиында болуы мүмкін емес)
- Екі жиынға бөлуге болмайды → **ЕКІБӨЛІМДІ ЕМЕС**

Практикалық қолданылуы

1. Несібе желілері:

- Жұмыс берушілер ↔ Жұмыс іздеушілер

2. Сайтқа тіркелу жүйесі:

- Пайдаланушылар ↔ Группалар/Бөлімдер

3. Тапсырыс жүйесі:

- Тапсырыс берушілер ↔ Өнімдер/Қызметтер

4. Білім беру жүйесі:

- Студенттер ↔ Курстар/Пәндер

1. Біріктіру амалы (Union)

Мысал 25:

G графы:

Төбелер: {1, 2}

Қырлар: {(1,2)}

H графы:

Төбелер: {2, 3}

Қырлар: {(2,3)}

Біріктіру нәтижесі G ∪ H:

Төбелер: {1, 2, 3}

Қырлар: {(1,2), (2,3)}

Сызбасы: 1---2---3

Талдау:

Төбелер: {1,2} ∪ {2,3} = {1,2,3}

Қырлар: {(1,2)} ∪ {(2,3)} = {(1,2), (2,3)}

2. Қиылысу амалы (Intersection)

Мысал 26:

G графы:

Төбелер: {1, 2, 3}

Қырлар: {(1,2), (2,3)}

H графы:

Төбелер: {2, 3, 4}

Қырлар: {(2,3), (3,4)}

Қиылысу нәтижесі G ∩ H:

Төбелер: {2, 3}

Қырлар: {(2,3)}

Сызбасы: 2---3

Талдау:

Төбелер: {1,2,3} ∩ {2,3,4} = {2,3}

Қырлар: {(1,2), (2,3)} ∩ {(2,3), (3,4)} = {(2,3)}

3. Толықтауыш амалы (Complement)

Мысал 27:

Бастапқы G графы:

Төбелер : {1, 2, 3}

Қырлар: {(1,2), (2,3)}

Сызбасы: 1---2---3

3. Толықтауыш G' графы:

Төбелер: {1, 2, 3} (бірдей)

Қырлар: {(1,3)} // бастапқыда жоқ қалған қыры

Сызбасы:



Талдау:

- Толық графтағы барлық мүмкін Қырлар: {(1,2), (1,3), (2,3)}
- Бастапқы қырлар: {(1,2), (2,3)}
- Толықтауыш қырлар: {(1,3)}

4. Ішкі граф

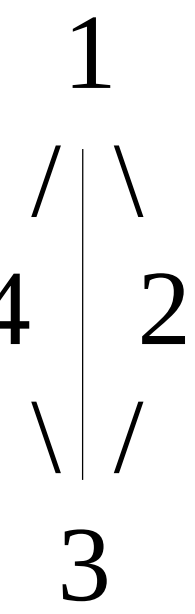
Мысал 28:

Бастапқы G графы:

Төбелер: {1, 2, 3, 4}

Қырлар: {(1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (1,3)}

Сызбасы:



Ішкі граф H (төбелер: {1, 2, 3}):

Төбелер: {1, 2, 3}

Қырлар: {(1,2), (2,3), (1,3)}

Сызбасы:



5. Іргелес граф (Induced Subgraph)

Мысал 29:

Бастапқы G графы:

Төбелер: {A, B, C, D}

Қырлар: {(A,B), (A,C), (B,C), (C,D)}

Іргелес граф (төбелер: {A, B, C}):

Төбелер: {A, B, C}

Қырлар: {(A,B), (A,C), (B,C)} // барлық мүмкін қырлар}

6. Граф қосу (Graph Join)

Мысал 30:

G графы:

Төбелер: {1, 2}

H графы:

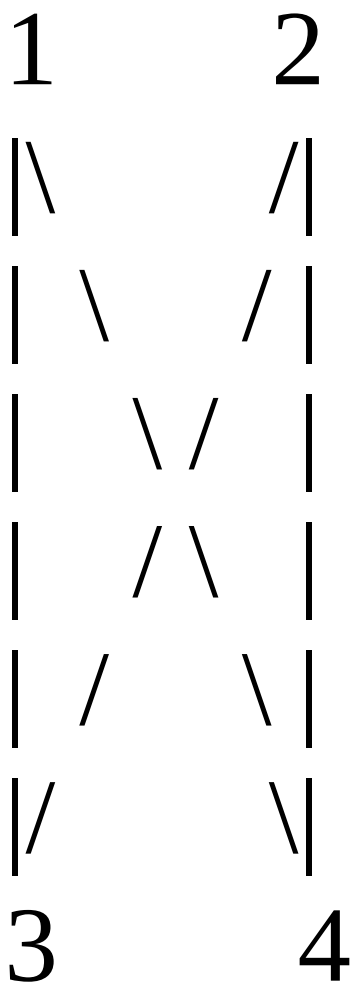
Төбелер: {3, 4}

Қосу нәтижесі G + H:

Төбелер: {1, 2, 3, 4}

Қырлар: {(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)}

Сызбасы:



7. Граф көбейту (Graph Product)

Мысал 31:

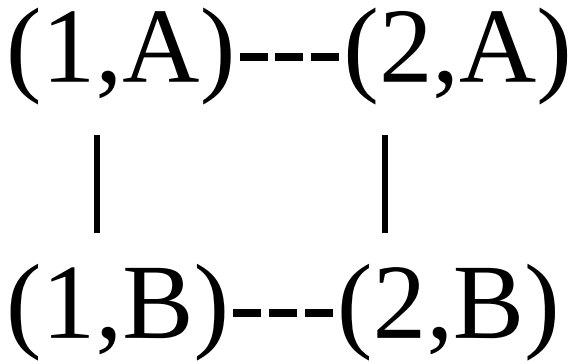
G графы:

1---2

H графы:

A---B

Көбейту нәтижесі G × H:



Практикалық мысалдар

Мысал 32: Желілерді біріктіру

Бірінші желі:

Үй --- Дүкен

Екінші желі:

Дүкен --- Мектеп

Біріктіру нәтижесі:

Үй --- Дүкен --- Мектеп

Мысал 33: Ортақ бөлікті табу

Бірінші достық желісі:

Айгүл --- Бауыржан --- Қанат

Екінші достық желісі:

Бауыржан --- Қанат --- Дина

Қиылысу нәтижесі:

Бауыржан --- Қанат

Мысал 34: Толықтауыш желі

Бастапқы байланыс:

Астана --- Караганды

|

Алматы

Толықтауыш желі:

Астана --- Алматы

Караганды --- Алматы

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков С.Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — Санкт Петербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

