Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Тәжірибелік сабақ 9

Жегалкин көпмүшелігі. Буль функцияларының толық кластары

ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Кіріспе.
2. Жегалкин көпмүшелігі.
3. Жегалкин көпмүшелігін құру әдістері.
4. Буль функцияларының толық кластары.
5. Пост теоремасы.
6. Күрделі мысалдар.
7. Қорытынды.

Мысал 1. Қарапайым функциялардың Жегалкин көпмүшеліктерін жазу керек.

1. Конъюнкция: $f(x,y)=x \wedge y$

   Жегалкин көпмүшесі: $f(x,y)=xy$

Конъюнкция тек x және y айнымалыларының көбейтіндісі ретінде жазылады.

2. Дизъюнкция: $f(x,y)=x \vee y$

   Жегалкин көпмүшесі: $f(x,y)=x \oplus y \oplus xy$

Дизъюнкцияны Жегалкин түрінде жазу үшін XOR операциясын қолданамыз.

3. Тең еместік (XOR): $f(x,y)=x \oplus y$

Жегалкин көпмүшесі: $f(x,y)=x \oplus y$

Бұл функцияның өзі Жегалкин түрінде болады.

4. Терістеу: $f(x)=\neg x$

Жегалкин көпмүшесі: $f(x)=1 \oplus x$

Терістеу функциясы 1-ді және x-ті қосу арқылы алынады.

Мысал 2. $f(x,y)=x\rightarrow y$ функциясы үшін Жегалкин көпмүшелігін құрыңыз.

Қадам 1: Ақиқаттық кестесін жазамыз:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Қадам 2: Жегалкин көпмүшелігінің жалпы түрі:

$$f(x,y)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy.$$

Қадам 3: Теңдеулер жүйесін құраймыз:

1. $f(0,0)=a_0=1$
2. $f(0,1)=a_0 \oplus a_2=1$
3. $f(1,0)=a_0 \oplus a_1=0$
4. $f(1,1)=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3=1$

Қадам 4: Теңдеулер жүйесін шешеміз:

1-ші теңдеуден: $a_0=1$

3-ші теңдеуден: $1 \oplus a_1=0 \Rightarrow a_1=1$

2-ші теңдеуден: $1 \oplus a_2=1 \Rightarrow a_2=0$

4-ші теңдеуден: $1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_3=1 \Rightarrow a_3=1$

Жауап: $f(x,y)=1 \oplus x \oplus xy$

Тексеру:

- (0,0): $1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$ ✓
- (0,1): $1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$ ✓
- (1,0): $1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$ ✓
- (1,1): $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ ✓

Мысал 3. $f(x,y)=x \vee y$ функциясы үшін Жегалкин көпмүшелігін құрыңыз.

Қадам 1: Ақиқаттық кестесін жазамыз:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Қадам 2: Жегалкин көпмүшелігінің жалпы түрі:

$$f(x,y)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy.$$

Қадам 3: Теңдеулер жүйесін құраймыз:

- $f(0,0)=a_0=0$
- $f(0,1)=a_0 \oplus a_2=1$
- $f(1,0)=a_0 \oplus a_1=1$
- $f(1,1)=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3=1$

Қадам 4: Теңдеулер жүйесін шешеміз:

$a_0=0$

$0 \oplus a_2=1 \Rightarrow a_2=1$

$0 \oplus a_1=1 \Rightarrow a_1=1$

$0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_3=1 \Rightarrow a_3=1$

Жауап: $f(x,y)=x \oplus y \oplus xy$

Тексеру:

x	y	xVy	x⊕y⊕xy
0	0	0	0⊕0⊕0 = 0 ✓
0	1	1	0⊕1⊕1 = 1 ✓
1	0	1	1⊕0⊕1 = 1 ✓
1	1	1	1⊕1⊕1 = 1 ✓

Мысал 4. $f(x,y)=x \vee y$ функциясын алгебралық түрлендіру арқылы Жегалкин көпмүшесіне келтіру.

Қадам 1: Дизъюнкцияны терістеу арқылы өрнектейміз:

$x \vee y=\neg(\neg x \wedge \neg y)$ (Де Морган заңы);

Қадам 2: Терістеуді Жегалкин түрінде жазамыз:

$\neg x=1 \oplus x, \neg y=1 \oplus y$;

Қадам 3: Терістеуді алмастырамыз:

$x \vee y=1 \oplus[(1 \oplus x)(1 \oplus y)]$;

Қадам 4: Көбейтуді орындаймыз:

$$(1 \oplus x)(1 \oplus y) = 1 \oplus [1 \oplus x \oplus y \oplus xy]$$

Қадам 5: Таратуды орындаймыз:

$$1 \oplus [1 \oplus x \oplus y \oplus xy] = 1 \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$$

Қадам 6: Жеңілдетуді орындаймыз:

$$1 \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy = x \oplus y \oplus xy$$

Жауап: $f(x,y) = x \oplus y \oplus xy$

Мысал 5. Мәндерін есептеу:

t = 0:

$\cos(0)=1$, $\cos(0)=1 \Rightarrow \text{wal}(3,0) = (+1)\cdot(+1) = 1$

t = 0.25:

$\cos(\pi/4)>0$, $\cos(\pi/2)=0 \Rightarrow \text{wal}(3,0.25) = (+1)\cdot(+1) = 1$

t = 0.5:

$\cos(\pi/2)=0$, $\cos(\pi)=-1 \Rightarrow \text{wal}(3,0.5) = (+1)\cdot(-1) = -1$

t = 0.75:

$\cos(3\pi/4)<0$, $\cos(3\pi/2)=0 \Rightarrow \text{wal}(3,0.75) = (-1)\cdot(+1) = -1$

Мысал 6. Бірінші Уолш функциялары

t	wal(0,t)	wal(1,t)	wal(2,t)	wal(3,t)
0	1	1	1	1
0.25	1	1	-1	-1
0.5	1	-1	-1	1
0.75	1	-1	1	-1

Мысал 7. f(x,y) = x ∨ y функциясы үшін

1-қадам: Ақиқаттық кестесін жазу

x	y	f(x,y)	f(x,y) {-1,+1}
0	0	0	-1
0	1	1	+1
1	0	1	+1
1	1	1	+1

2-қадам: Уолш коэффициенттерін есептеу керек.
n=2 үшін Уолш матрицасы:

$$W = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Функция векторы: F=[−1,+1,+1,+1]

3-қадам: Коэффициенттерді есептеу: $c = \frac{1}{4} W \cdot f$

$$c_0 = \frac{1}{4}(-1+1+1+1) = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(-1-1+1-1) = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(-1+1-1-1) = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(-1-1-1+1) = \frac{-2}{4} = -0.5$$

4-қадам: Жегалкин коэффициенттеріне көшу: Уолш коэффициенттері мен Жегалкин коэффициенттері арасындағы байланыс:

$$a = H \cdot c,$$

мұндағы:

- a - Жегалкин коэффициенттері векторы;
- c - Уолш коэффициенттері векторы;
- H - Адамар матрицасы.

5-қадам: Жегалкин көпмүшесін құру

a=[0,1,1,1]

$$f(x,y)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy = 0 \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot y \oplus 1 \cdot xy$$

$$f(x,y)=x \oplus y \oplus xy$$

Мысал 8. Толық кластардың қолданылуы (Әртүрлі толық кластар арқылы негізгі логикалық операцияларды өрнектеу)

1. {¬, ∧} классы арқылы дизъюнкцияны өрнектеу:

$x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$;

Тексеру:

Егер x=0, y=0: $\neg(\neg 0 \wedge \neg 0) = \neg(1 \wedge 1) = \neg 1 = 0$ ✓

Егер x=0, y=1: $\neg(\neg 0 \wedge \neg 1) = \neg(1 \wedge 0) = \neg 0 = 1$ ✓

2. {↓} (Пирс жебесі) классы арқылы теріcтеуді өрнектеу

Пирс жебесі: $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$

Терістеу үшін:

$$\neg x = x \downarrow x$$

Тексеру:

$x=0$: $0 \downarrow 0 = \neg(0 \vee 0) = \neg 0 = 1$ ✓

$x=1$: $1 \downarrow 1 = \neg(1 \vee 1) = \neg 1 = 0$ ✓

3. {|} (Шеффер штрихы) классы арқылы конъюнкцияны өрнектеу

Шеффер штрихы: $x|y=\neg(x\wedge y)$

Конъюнкция үшін:

$$x\wedge y=(x|y)|(x|y)$$

Тексеру:

x=0, y=0: $(0|0)|(0|0) = (1)|(1) = \neg(1\wedge1) = \neg1 = 0$ ✓

x=1, y=1: $(1|1)|(1|1) = (0)|(0) = \neg(0\wedge0) = \neg0 = 1$ ✓

Қорытынды:

Бұл мысалдар:

- бір толық класс арқылы басқа операцияларды өрнектеуге болатынын;
- {¬, ∧}, {↓}, {|} - барлығы толық кластар;
- минималды толық класстар ({↓} және {|}) тек бір операциядан тұратынын көрсетеді.

Мысал 9. Post сыныптарына мысалдар келтіру керек.

1. Т-0 функциясы: $f(x,y)=x\wedge y$

$f(0,0)=0\wedge 0=0 \Rightarrow$ Т-0-ге кіреді.

2. Т-1 функциясы: $f(x,y)=x\vee y$

$f(1,1)=1\vee 1=1 \Rightarrow$ Т-1-ге кіреді.

3. Қос/ Двойственная функция: $f(x)=\neg x$

$\neg(\neg x)=x \Rightarrow$ Қос функция.

4. Монотонды функция:

$f(x,y)=x \vee y$

Егер $xi \leq yi$ болса, онда $f(x) \leq f(y) \Rightarrow$ монотонды.

5. Сызықты функция:

$f(x,y)=x \oplus y$

Жегалкин көпмүшесінде тек сызықты мүшелер бар $\Rightarrow$ сызықты.

Мысал 10. {∧, ∨} классын талдау керек.

Бұл класс толық емес, себебі:

- Терістеуді өрнектей алмаймыз;
- Т-1 сыныбына кіреді, бірақ Т-0 сыныбына кірмейді;
- Пост теоремасы бойынша толық емес.

Мысал 11. $\{\oplus, \wedge\}$ классын талдау керек.

Бұл класс толық емес, себебі:

- Барлық функциялары сызықты (Л сыныбы);
- Дизъюнкция сияқты сызықты емес функцияларды өрнектей алмаймыз.

Мысал 12. $\{\rightarrow\}$ классын талдау керек.

Бұл класс толық емес, себебі:

- Тек монотонды функцияларды өрнектей аламыз
- Терістеу сияқты монотонды емес функцияларды өрнектей алмаймыз

Мысал 13.

Күрделі $f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(\neg x\wedge z)$ функциясының Жегалкин көпмүшелігін табу керек.

Ақиқаттық кестесі:

x	y	z	¬x	x∧y	¬x∧z	f(x,y,z) = (x∧y)∨(¬x∧z)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

Жегалкин көпмүшелігі:

$$f(x,y,z)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz.$$

Ең қарапайым жол - алгебралық түрлендіруді қолдану керек.

1. $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) = xy \vee (1 \oplus x)z$
2. $= xy \vee z \oplus xz$
3. $= xy \oplus z \oplus xz \oplus xy(z \oplus xz)$ (∨-ды ⊕ арқылы өрнектеу)
4. $= xy \oplus z \oplus xz \oplus xyz \oplus x^2yz$
5. $= xy \oplus z \oplus xz \oplus xyz \oplus xyz$ $(x^2 = x)$
6. $= xy \oplus z \oplus xz$

Жауап: $f(x,y,z) = z \oplus xy \oplus xz$

Мысал 14. Post сыныптарын толық талдау керек.
Берілген функция: $f(x,y)=x \oplus y$.

Талдау:

Т-0: $f(0,0)=0 \oplus 0=0 \Rightarrow$ Т-0-ге кіреді

Т-1: $f(1,1)=1 \oplus 1=0 \Rightarrow$ Т-1-ге кірмейді

С: $\neg f(\neg x,\neg y)=\neg(\neg x \oplus \neg y)=\neg(x \oplus y)=x \oplus y \oplus 1 \Rightarrow$ қос/ двойственная емес

М: $f(0,1)=1$, $f(1,0)=1$, бірақ $f(1,1)=0 \Rightarrow$ монотонды емес

Л: $f(x,y)=x \oplus y \Rightarrow$ сызықты

Қорытынды: функция Л сыныбына кіреді

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков С.Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — Санкт Петербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электронно библиотечная система.
5. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

