Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Тәжірибелік сабақ 5

Рекуренттік қатынастар. Қайтымды тізбектер.

ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Рекурентті қатынас ұғымы;
2. Сызықтық рекуренттік қатынас.

Мысал 1. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі арифметикалық прогрессия және d оның айырмасы болса, онда

$$a_{n+1}=a_n+d$$

қатынасы, бірінші мүшесі a_1 берілген жағдайда арифметикалық прогрессияның кез келген мүшесін табуға мүмкіндік береді.

Олай болса ол 1–ші ретті ($n+k=n+1 \Rightarrow k=1$) рекуренттік қатынас болады, яғни арифметикалық прогрессия - рекурентті (қайтымды) тізбек болады.

Сол сияқты $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі арифметикалық прогрессия және q оның еселігі болса, онда

$$b_{n+1}=b_n q$$

қатынасы, b_1 бірінші мүшесі берілген жағдайда геометриялық прогрессияның кез келген мүшесін табуға мүмкіндік беретіндіктен, 1 - ретті рекуренттік қатынас болады. Олай болса геометриялық прогрессия - қайтымды (рекурентті) тізбек.

«Рекурентті тізбекті бір ғана рекурентті қатынаспен беріле ме, әлде әртүрлі қатынастармен беруге бола ма?» деген сұрақты қарастырайық.

Сұраққа жауапты мысалмен берейік.

Мысал 2. Арифметикалық прогрессияны беретін

$$a_{n+1}=a_n+d$$

қатынасында n – нің орнына $n+1$ санын алғанда шығатын

$$a_{n+2}=a_{n+1}+d$$

қатынасынан $a_{n+1}=a_n+d$ қатынасын мүшелеп шегерсек прогрессияны беретін екінші ретті

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n.$$

Егер a_1, a_2 алғашқы екі мүшесі берілсе, бұл қатынас арифметикалық прогрессияның кез келген (барлық) мүшесін табуға мүмкіндік береді.

Олай болса

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$$

қатынасы арифметикалық прогрессияның екінші ретті рекуренттік қатынасы болады.

Осылайша $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ қатынасын пайдалана отырып, егер a_1, a_2, a_2 алғашқы үш мүшесі берілсе арифметикалық прогрессияның кез келген (барлық) мүшесін табуға мүмкіндік беретін

$$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$$

рекуренттік қатынасын алуға болады.

Сонымен біз

$$a_{n+1}=a_n+d,$$

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,$$

$$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$$

рекуренттік қатынастарының кез келгені бір арифметикалық прогрессияның (тізбектің) рекуренттік қатынасы болатынын, яғни рекурентті тізбектің әртүрлі қатынастармен берілуі мүмкін екенін көрсеттік.

Мысалы, 1 - мысалда келтірілген

$$a_{n+1}=a_n+d$$

қатынасы бірінші ретті $(k=1, p_0=1)$ *сызықтық біртексіз* $(f(n)=d\neq 0)$ *рекуренттік қатынас* болады да,

$$b_{n+1}=b_n q$$

қатынасы *бірінші ретті* $(k=1, p_0=q)$ *сызықтық біртекті* $(f(n)=0)$ *рекуренттік қатынас* болады.

Мысал 3. $a_{n+1}=a_n+d$ рекурентті арифметикалық прогрессия қатынасын шешіңіз.

Шешімі:

$$a_{n+1} = a_n + d =$$
$$= (a_{n-1} + d) + d =$$
$$= a_{n-1} + 2d =$$
$$= (a_{n-2} + d) + 2d =$$

$$a_{n-2} + 3d = \cdots = a_{n-(n-1)} + nd =$$
$$= a_1 + nd \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + nd \Rightarrow$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

берілген арифметикалық прогрессияның жалпы мүшесі, яғни шешімі

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

функциясы болады ($f(n) = a_1 + (n-1)d$).

Сол сияқты, $b_{n+1} = b_n q$ геометриялық прогрессия қатынасының шешімі

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

функциясы болатынын көрсетуге болады

($f(n) = 5q^{n-1}$).

Сызықтық тұрақты коэффициентті біртекті рекуренттік қатынасты шешу

Мысал 1.

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 0,\ n \in N \qquad (4)$$

рекуренттік теңдеуінің

$$a_1 = 2,\ a_2 = 1 \qquad (5)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешімі: Жоғарыдағы алгоритм бойынша шешеміз.

1. (4) рекуренттік қатынасының (3) сипаттамалық теңдеуін құрамыз:
   $\lambda^2-6\lambda+5=0$.
2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:
   $\lambda_1=5, \lambda_2=1$.

3. Әр түбірге сәйкес рекуренттік қатынасының шешімдерін жазамыз:
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$ – жай нақты түбірлер, онда олардың әрқайсысына $a_n = \lambda^n$ түріндегі бір - бір түбірден сәйкес келеді:
$a_n^{(1)} = 1^n = 1$, $a_n^{(2)}=5^n$.
4. (4) рекуренттік қатынасының жалпы шешімін құрамыз:
$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} = c_1 \cdot 1 + c_2 5^n \Rightarrow$
$a_n = c_1 + c_2 5^n$
(4) рекуренттік қатынасының жалпы шешімі, мұндағы c_1, c_2 – еркін тұрақтылар.

5. (5) бастапқы шарттарда берілген $a_1 = 2,\ a_2 = 1$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы c_1, c_2 – еркін тұрақтыларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \cdot 1 + c_2 5^1 \\ a_2 = c_1 \cdot 1 + c_2 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = c_1 + 5c_2 \\ 1 = c_1 + 25c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{20} \\ c_2 = \frac{9}{4} \end{cases}.$$

6. Еркін тұрақтылардың $c_1 = -\frac{1}{20}$, $c_2 = \frac{9}{4}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы(4) рекурентті қатынасының (5) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін аламыз:

$$a_n = -\frac{1}{20} + \frac{9}{4}5^n$$

(4) рекуренттік теңдеуінің (5) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі.

Мысал 2.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,\ n \in N \qquad (6)$$

рекуренттік теңдеуінің

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \qquad (7)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешімі: Жоғарыдағы алгоритм бойынша шешеміз.

1. (6) рекуренттік қатынасының (3) сипаттамалық теңдеуін құрамыз $\lambda^2-4\lambda+4=0$.
2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз: $\lambda_1=\lambda_2=2$.

3. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты және бір-біріне тең, яғни $\lambda_1=\lambda_1=2$ екі еселі түбір.

Олай болса бұл түбірге (6) қатынасының

$$a_n^{(1)} = \lambda_1{}^n = 2^n,\ a_n^{(2)} = n\lambda_1{}^n = n2^n$$

екі шешімі сәйкес келеді.

4. (6) рекуренттік қатынасының жалпы шешімін құрамыз:

$$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} = c_1 \cdot 2^n + c_2 n2^n \Rightarrow$$

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 n2^n$$

(6) рекуренттік қатынасының жалпы шешімі, мұндағы c_1, c_2 – еркін тұрақтылар.

5. (5) бастапқы шарттарда берілген $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы c_1, c_2 – еркін тұрақтыларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 \\ a_2 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2 \cdot 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2c_1 + 2c_2 \\ 3 = 4c_1 + 8c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

6. Еркін тұрақтылардың $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы (6) рекурентті қатынасының (7) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табамыз:

$$a_n = \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{4}n2^n = (1+n)2^{n-2} \Rightarrow$$

$$a_n = (1+n)2^{n-2}$$

(6) рекуренттік теңдеуінің (7) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі.

Мысал 3.

$$a_{n+2} - \sqrt{2}a_{n+1} + a_n = 0,\ n \in N \qquad (8)$$

рекуренттік теңдеуінің

$$a_1 = -\sqrt{2},\ a_2 = 2\sqrt{2} \qquad (9)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешімі: Жоғарыдағы алгоритм бойынша шешеміз.

1. (8) рекуренттік қатынасының (3) сипаттамалық теңдеуін құрамыз $\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1=0$.
2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\cdot1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}=1\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\lambda_{1,2}$- жай түйіндес комплекс түбірлер.
Олай болса бұл түбірлерге (8) қатынасының
$a_n^{(1)} = 1^n cosn\frac{\pi}{4} = cosn\frac{\pi}{4}$, $a_n^{(2)} = 1^n sinn\frac{\pi}{4} = sinn\frac{\pi}{4}$
түрлеріндегі екі шешімі сәйкес келеді.
4. (8) рекуренттік қатынасының жалпы шешімін құрамыз:
$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} = c_1 cosn\frac{\pi}{4} + c_2 sinn\frac{\pi}{4} \Rightarrow$
$a_n = c_1 cosn\frac{\pi}{4} + c_2 sinn\frac{\pi}{4}$
(8) біртекті рекуренттік қатынасының жалпы шешімі, мұндағы c_1, c_2 — еркін тұрақтылар.

5. (9) бастапқы шарттарда берілген $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы c_1, c_2 – еркін тұрақтыларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 cos\frac{\pi}{4} + c_2 sin\frac{\pi}{4} \\ a_2 = c_1 cos2\frac{\pi}{4} + c_2 sin2\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_2 \\ 2\sqrt{2} = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -2 - 2\sqrt{2} \\ c_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

6. Еркін тұрақтылардың $c_1 = -2 - 2\sqrt{2}$, $c_2 = 2\sqrt{2}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылықатынастың $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табамыз:

$$a_n = (-2 - 2\sqrt{2})cosn\frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2}sinn\frac{\pi}{4}$$

(8) біртекті рекуренттік теңдеуінің (9) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

