Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Тәжірибелік сабақ 3-4

Таңдамалар және олардың түрлері. Комбинаториканың негізгі ережелері. Енгізу-шығару формулалары.

ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Комбинаторика және қолданылуы
2. Комбинаториканың негізгі принциптері.
3. Орналастыру, теру, алмастыру

Мысал 1. Топта 12 ұл және 8 қыз бала бар. Тақтаға бір адамды қанша жолмен шақыруға болады?

Шешімі:

- a – ұл бала, таңдау саны $n = 12$;
- b - қыз бала, таңдау саны $m = 8$;
- a мен b бірге таңдалынбайды, бірге таңдалу саны $k = 0$.

Тақтаға бір адамды шақыру жолдарының саны ***a* немесе *b*** нысанын таңдау тәсілдерінің саны болады да, ол сан, қосу принципі бойынша,

$$n + m - k = 12 + 8 - 0 = 20$$

санына тең болады.

Мысал 2.

Топтың студенттері математика және философия пәндерінен емтихан тапсырды. Топтың 10 адамы математиканы беске, 7 адамы философияны беске және 4 адамы екеуін де беске тапсырды. Тым болмаса бір емтиханды беске тапсырған адамдар саны нешеу?

Шешімі:

- a – математиканы беске тапсырған студент, таңдау саны $n = 10$;
- b - қыз бала, таңдау саны $m = 7$.

Екі емтиханды да беске тапсырғандар, яғни a мен b бірге таңдалынатын әдістер $k = 4$.

Тым болмаса бір емтиханды беске тапсырған адамдар саны ***a* немесе *b*** нысанын таңдау тәсілдерінің саны болады да, ол сан, қосу принципі бойынша,

$$n + m - k = 10 + 7 - 4 = 13$$

санына тең болады.

Шешімі: Белгілеулер енгізсек:

- M - математиканы "5"-ке тапсырған студенттер жиыны.
- F - философияны "5"-ке тапсырған студенттер жиыны.

Берілген мәліметтер:

- $|M|=10$
- $|F|=7$
- $|M \cap F|=4$ (екеуін де "5"-ке тапсырғандар)

"Тым болмаса бір емтиханды беске тапсырған адамдар саны" - бұл $M \cup F$ бірігуінің элементтер саны.

Бірігу формуласы:

$$|M \cup F|=|M|+|F|-|M \cap F|$$

Мәндерді қоямыз:

$$|M \cup F|=10+7-4$$

$$|M \cup F|=13.$$

Мысал 3.

Топтағы 25 адамның 12 адамы шахмат, 14 адамы дойбы, 8 адамы шахмат та, дойбы да ойнай алады. Топта шахмат та, дойбы да ойнай алмайтын неше адам бар?

Шешімі:

S - шахмат ойнай алатын студенттер жиыны.

D - дойбы ойнай алатын студенттер жиыны.

Берілген мәліметтер:

- $|S|=12$
- $|D|=14$
- $|S\cap D|=8$ (екеуін де ойнай алатындар)
- Топтағы барлық адамдар саны: $|U|=25$

Шахмат немесе дойбы ойнай алатындар санын табу:

- Бірігу формуласы:
  $|S\cup D|=|S|+|D|-|S\cap D|$
- Мәндерді қоямыз:
  $|S\cup D|=12+14-8$
  $|S\cup D|=18$

Ешқайсысын ойнай алмайтындар саны:

Барлық топ мүшелерінің санынан кем дегенде бір ойнай алатындарды алып тастаймыз:

Ешқайсысын ойнай алмайтындар=

$=|U|-|S\cup D|=25-18=7.$

Мысал 4.

Топтағы әрбір студент не әнші, не биші, не домбырада ойнайды. Топта 16 әнші бар, оның 6-уы биші және 4 биші домбырада ойнайды. Топта 11 биші бар, олардың 8-і домбырада ойнайды. Домбырада ойнайтындар саны 20, оның 12-сі әнші. Топта неше студент бар?

Шешімі:

A – әншілердің, B – бишілердің, C домбырашылардың жиыны болсын.

Онда:

|AUBUC| - топтағы студенттер саны;

A∩B – билейтін әншілер жиыны;

A∩C – домбырада ойнайтын әншілер;

B∩C - домбырада ойнайтын барлық бишілердің жиыны;

A∩B∩C - домбырада ойнайтын билейтін әншілер жиыны болады.

Есептің берілімі бойынша

|A| = 16, |A∩ B| = 6,

|B| = 11, |A∩C| = 12,

|C| = 20, |B ∩ C| = 8,

|A∩ B ∩C| = 4.

(1) формуласында n = 3 деп алсақ

$$|AUBUC| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 16 + 11 + 20 - (6 + 12 + 8) + 4 = 25.$$

теңдігін аламыз. Сонымен, топта 25 студент бар.

Мысал 5. Бірінші топта 15, екінші топта 20 оқушы бар. Әр топтан бір оқушыдан неше жұп құруға болады?

Шешімі:

n = 15, m = 20

a – бірінші топтың оқушысы, таңдау саны $n = 15$;

b **-** қыз бала, ***a*** таңдалғаннан кейінгі таңдау саны $m = 20$;

Көбейту принципі бойынша жұп таңдау тәсілдерінің саны

$n \cdot m = 15 \cdot 20 = 300$.

Мысал 6. Таудың басына апаратын 5 жол бар. Таудан оған көтерілген жолдан басқа жолмен түсу қажет болса, тауға неше тәсілмен көтеріліп түсуге болады?

Шешімі:

a – тауға шығу жолы, таңдау саны $n = 5$.

b - таудан түсу жолы, ***a*** таңдалғаннан кейінгі таңдау саны $m = 4$ (5 жолдың біреуі таңдалып қойған, қалғаны төртеу).

Көбейту принципі бойынша (a,b) жұбын таңдау тәсілдерінің саны

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Көтерілу (a): n = 5

Түсу (b, a-дан өзгеше): m = 4

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Мысал 7. 3 адамды 5 орындыққа неше тәсілмен орналастыруға болады?

Шешімі:

- a_1 нысаны – бірінші адамның орындығы, оны, ол 5 орындықтың кез келгені бола алатындықтан, $k_1=5$ тәсілмен таңдауға болады.
- a_2 нысаны – екінші адамның орындығы, оны, ол a_1 нысаны таңдалған соң, яғни бір орындық таңдалып қойғаннан соң, қалған 4 орындықтың кез келгені бола алатындықтан, $k_2=4$ тәсілмен таңдауға болады.
- a_3 нысаны – үшінші адамның орындығы, оны, ол a_1, a_2 нысандары нысандары таңдалған соң, яғни екі орындық таңдалып қойғаннан соң, қалған 3 орындықтың кез келгені бола алатындықтан, $k_3=3$ тәсілмен таңдауға болады.

Олай болса, көбейту принципі бойынша, (a_1,a_2,a_3) үштігін таңдау тәсілдерінің саны

$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

санына тең болады.

3 адамды 5 орындыққа орналастыру саны: **60.**

Мысал 8. Емтихан тапсырып шыққан 7 студенттің тым болмаса екеуінің бағасы бірдей болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі:

- Бағалар – індер, індер саны төртеу: 2, 3, 4, 5.
- Студенттер – қояндар, қояндар саны жетеу.

Әрбір інге сәйкес бағалы қоян отырғызылады. Қояндар саны індер санынан артық, олай болса, Дирихле принципі бойынша, тым болмаса бір індегі қояндар саны екі немесе одан да артық болады, яғни төрт бағаның тым болмаса біреуіне сәйкес студенттер саны екі немесе одан да артық болады, яғни тым болмаса екі студенттің бағасы бірдей болады.

Мысал 9. A ={2,7,6,9} жиыны берілсін. A жиыны 4 элементті жиын, яғни $n = 4$.

- θ=(2,7,9) таңдамасы 4 тен 3 бойынша қайталанусыз таңдама: k=3.
- θ=(2,7,6,9) таңдамасы 4 тен 3 бойынша қайталанусыз таңдама: $k = 4$.
- θ=(7,7) 4 тен 2 бойынша қайталамалы таңдама (7 элементі екі рет қайталанып тұр): $k = 2$.
- θ=(2,7,6,2,2,9,6) таңдамасы 4 тен 7 бойынша қайталамалы таңдама (2 элементі 3 рет, 6 элементі екі рет қайталанып тұр): $k = 7$.

Мысал 10. 5 студентті бір қатарға неше тәсілмен тұрғызуға болады?

Шешімі: 5 студентті бір қатарға тұрғызу тәсілі басқа тұрғызу тәсілінен
тек студенттердің орналасу ретімен ғана өзгешеленеді. Олай болса, 5 студентті бір қатарға тұрғызу, 1 – анықтама бойынша, 5 ұзындықты қайталанусыз алмастыру болады да олардың саны

$$P_5 = 5!$$

санына тең болады.

Жауабы: 5 студентті бір қатарға 120 тәсілмен отырғызуға болады.

Жаттығулар.

1. Тоғыз параққа 1 ден 9 дейінгі цифрлар жазылған. Осы парақтарды пайдаланып бірдей цифрлары жоқ неше 9 орынды сан жазуға болады?
2. Аудиториядағы 15 орындыққа 15 студентті неше тәсілмен отырғызуға болады?
3. 2,3, 4, 5, 6, 7 цифрларын пайдаланып неше алты орынды телефон нөмірін құруға болады?
4. 8 адам кезекке неше тәсілмен тұра алады?
5. Үш бірдей және сегіз әртүрлі кітапты бір сөреге үш бірдей кітап қатар тұратындай етіп неше тәсілмен қоюға болады?

Мысал 11. Топтағы 12 студенттің ішінен 3 кезекшіні неше тәсілмен тағайындауға болады?

Шешімі: Студенттер тобын 12 элементті жиын деп қарастырсақ, 3 кезекшіден тұратын топ ұзындығы үшке тең $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ қайталамасыз (топта бірдей студенттер жоқ) таңдамасы болады. Кезекшілер топтары, яғни $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ таңдамалары, тек құрамдарымен ғана өзгешеленеді (берілген топ тек топтың тым болмаса бір студентін өзгерткенде өзгереді). Онда, 2 – анықтама бойынша, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ таңдамасы 12 ден 3 бойынша қайталанусыз теру болады да, олардың саны

$$C_{12}^{3}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=220$$

санына тең болады.

Жауабы. Топтағы12 студенттің ішінен 3 кезекшіні 220 тәсілмен тағайындауға болады.

Жаттығулар.

1. 10 ұяға 7 қызыл және 3 көк допты бір бірден неше тәсілмен салуға болады?
2. 8 команданың әрбіреуі басқаларының әрқайсысымен бір реттен кездесу үшін неше ойын өткізу керек?
3. Спортлотоның 49 шаршысының 6 шаршысын неше тәсілмен толтыруға болады?
4. 3 допты 5 қорапқа неше тәсілмен салуға болады?
5. 25 студенттен тұратын топта 3 кезекшіні тәсілмен тағайындауға болады?

Мысал 12.

$A = \{2,7,6,9\}$ жиынның әртүрлі цифрларынан құрылған екі орынды сандарды 4 тен 2 бойынша қайталанусыз орналастырулар деп қарастыруға бола ма?

Шешімі: A = {2,7,6,9} жиының цифрларынан құрылған екі орынды санды 4 тен 2 бойынша таңдама деп қарастыруға болады. Есептің шарты бойынша бұл таңдамалар әртүрлі цифрлардан құрылған, олай болса олар қайталанусыз таңдамалар.

Енді бұл таңдамалардың бір бірінен қалай өзгешеленетінін қарастырайық.

Егер санның тым болмаса бір цифрын өзгертсек сан да өзгереді (мысалы, 26 санының 6 цифрын 9 цифрына өзгертсек 26 санынан өзгеше 29 саны шығады), яғни таңдамалар құрамымен өзгешеленеді.

Егер әртүрлі цифрлардан тұратын санның цифрларының орналасу ретін өзгертсек сан да өзгереді (мысалы $27 \neq 72$), яғни таңдамалар элементтерінің ретімен өзгешеленеді.

Сонымен әртүрлі цифрлардан құрылған 2 орынды сандар құрамымен немесе элементтерінің ретімен өзгешеленетін 4 тен 2 бойынша қайталанусыз таңдамалар болып шықты. Онда олар, 3 – анықтама бойынша, 4 тен 2 бойынша қайталанусыз орналастырулар болады.

Мысал 13. $A=\{2,7,6,9\}$ жиынның әртүрлі цифрларынан құрылған неше екі орынды сан жазуға болады?

Шешімі: 12 – мысалда $A=\{2,7,6,9\}$ жиының әртүрлі цифрларынан құрылған екі орынды сандарды 4 тен 2 бойынша қайталанусыз орналастырулар деп қарастыруға болатыны көрсетілген болатын. Олай болса бұл екі орынды сандардың жалпы саны n нен k бойынша қайталанусыз орналастырулар санына, яғни

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \cdot 3 = 12$$

санына тең болады.

Жаттығулар.

1. 25 студенттен тұратын топтың старостасы мен оның орынбасарын неше тәсілмен тағайындауға болады?
2. 20 оқымыстыдан тұратын ғылыми қоғамның президентін, президенттің орынбасарын және ғылыми хатшысын неше тәсілмен тағайындауға болады?
3. Тоғыз параққа 1 ден 9 дейінгі цифрлар жазылған. Осы парақтарды пайдаланып бірдей цифрлары жоқ неше 5 орынды сан жазуға болады?
4. 5 тілдің кез келгенінен кез келгеніне аударма жасай алу үшін неше сөздік керек?
5. 4 ойын сүйегін тастағанда ұпайлардың қанша түрлі жұбы түсуі мүмкін?

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

