БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ (БӨЖ) ТАПСЫРМАЛАРЫ №5

5.1 «Функцияны зерттеу және Лопиталь ережесі» тақырыбына арналған типтік есептер

1. $y = f(x)$ функциясының $[a,b]$ аралығында ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

1	$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ $[1;4]$	2	$y = x^5 - x^3 - 2x + 1$ $[-2;0]$
3	$y = 2 - x - \frac{4}{x^2}$ $[1;4]$	4	$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ $[0;3]$
5	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}$ $[0;6]$	6	$y = x - \frac{8}{x^4}$ $[-3;-1]$
7	$y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ $[-3;3]$	8	$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ $[3;7]$
9	$y = \sin 2x - 2x$ $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$	10	$y = x\sqrt{3} + 2\sin^2 x$ $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$
11	$y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ $[-1;5]$	12	$y = 8\ln x - x^2$ $[1;e]$
13	$y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 1$ $[-1;2]$	14	$y = 5\sqrt[5]{(3x+2)^4} + 12x$ $[-2;10]$
15	$y = x\sqrt{6-x^2}$ $[-1;\sqrt{6}]$	16	$y = x + \frac{27}{x^3}$ $[1;4]$

17	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}$ $[3;3]$	18	$y=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}$ $[-4;-1]$
19	$y=x+\cos^2 x$ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	20	$y=(x-2{,}25)\cdot e^{x^2}$ $[2;4]$
21	$y=2x^2-\ln x$ $[1;e]$	22	$y=x^5-x^3-3x+1$ $[-2;1]$
23	$y=3\sqrt[3]{(7x-1)^2}+7x$ $\left[-\frac{26}{7};0\right]$	24	$y=x^4-2x^3+2x^2$ $[0;3]$
25	$y=x+\frac{8}{x^4}$ $[1;3]$	26	$y=x-\frac{4}{x^4}$ $[-3;-2]$
27	$y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}$ $[1;4]$	28	$y=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}$ $[3;8]$
29	$y=(2-x)\cdot e^{-x}$ $[0;4]$	30	$y=x\sqrt{3}+3\sin^2 x$ $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$
31	$y=x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3}$ $[-1;1]$	32	$y=7\ln x-x^2$ $[2;e]$
33	$y=\frac{\ln x}{x}$ $\left[\frac{1}{e};e^2\right]$	34	$y=\sqrt[5]{(3x+2)^4}+10x$ $[-1;10]$
35	$y=3x^4-24x^2+1$ $[-3;1]$	36	$y=x+\frac{5}{x^3}$ $[2;4]$
37	$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$	38	$y=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}$

	$[-0{,}5\pi;\pi]$		$[-4;-2]$
39	$y=\dfrac{x^2-3}{x^3}$ $[-4;-1]$	40	$y=(x-2)\cdot e^{x^2}$ $[2;5]$

2. $y=f(x)$ функциясын зерттеп, графигін тұрғызыңыз.

1	$y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$	2	$y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	3	$y=\dfrac{4x}{2+x^2}$
4	$y=\dfrac{1+2x^3}{x^2}$	5	$y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	6	$y=\dfrac{4x}{(1-x)^2}$
7	$y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	8	$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$	9	$y=\dfrac{5}{x^2+2x-3}$
10	$y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	11	$y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$	12	$y=\dfrac{x^2-9x}{x+3}$
13	$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$	14	$y=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}$	15	$y=\dfrac{x^3+5}{x^2}$
16	$y=\dfrac{2}{2x+x^2}$	17	$y=\dfrac{12-3x^2}{12+x^2}$	18	$y=\dfrac{8x}{4+x^2}$
19	$y=\dfrac{12x}{x^2+9}$	20	$y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$	21	$y=\dfrac{4x}{(1+x)^2}$
22	$y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	23	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$	24	$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$
25	$y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$	26	$y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$	27	$y=\dfrac{x^2-4x}{x+2}$
28	$y=\dfrac{(x-3)^3}{(x-1)^2}$	29	$y=\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}$	30	$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$
31	$y=\dfrac{1+2x^3}{x^2}$	32	$y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	33	$y=\dfrac{4x}{(1-x)^2}$
34	$y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	35	$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$	36	$y=\dfrac{5}{x^2+2x-3}$
37	$y=\dfrac{2}{2x+x^2}$	38	$y=\dfrac{12-3x^2}{12+x^2}$	39	$y=\dfrac{8x}{4+x^2}$

40	$y=\dfrac{12x}{x^2+9}$				

3. Лопиталь ережесін қолданып шекті есептеңіз

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$	2	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\log_5 x}$	3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{\frac{x}{2}}-2-x}{x^2}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$	5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 2x-12}{x^3}$	6	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-6x}-1-2x}{x^2}$	8	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{arctg(x+3)}{x^3+3x^2}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg2x-6x}{x^3}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{x^2}$	12	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{5+2x}-1}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x-4x}{x^3}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tg2x}{x-\sin 2x}$	15	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(0{,}5\pi x)}{x-1}$
16	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{\sin 3x}$	18	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{x^3}$	20	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(3x+5)}{\sqrt[4]{2x+3}}$	21	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$
22	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{arctg(x+3)}{x^3+3x^2}$	23	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tgx}{x-\sin x}$
25	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{arctg(x+2)}{x+2}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x}$	27	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\log_6 x}$
28	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5-2x}-1}$	29	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{\sqrt[3]{x-6}+2}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{\sin 4x}$
31	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$	32	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$	33	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{\sqrt{5+2x}-1}$
34	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$	35	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{3x}$	36	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$
37	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(0{,}5\pi x)}{2x-2}$	38	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-x}{x-\sin 2x}$	39	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(3x+10)}{\sqrt[4]{2x+6}}$
40	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x+1}$				

5.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $[-3;2]$ аралығындағы $y = x^4 - 2x^2 + 3$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешімі: $[-3;2]$ аралығында жататын кризистік нүктелерін табайық.

$$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1.$$

Барлық кризистік нүктелері берілген аралықта жатқандықтан, осы және аралықтың шеткі нүктелеріндегі функцияның мәнін анықтайық:

$$y(0) = 3, \quad y(-1) = 2, \quad y(1) = 2, \quad y(-3) = 66, \quad y(2) = 11.$$

Осы мәндердің арасынан ең кішісін және ең үлкенін таңдап аламыз. Осыдан функцияның ең үлкен мәні 66-ға, ал ең кіші мәні 2-ге тең болады.

2. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^3}$ функциясын зерттеп, графигін тұрғызыңыз.

Шешімі:

1) функцияның анықталу облысын анықтаймыз:

$$D(y) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty).$$

2) функцияның үзіліс нүктелерін анықтау: рационал бөлшек өзінің анықталу облысында үзіліссіз. Үзіліс нүктесі x=0, өйткені функцияның мәні анықталмаған. Біржақты шектерді табамыз

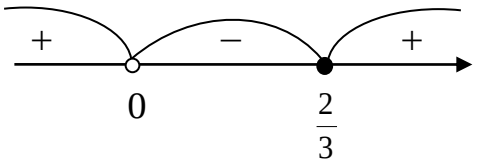
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{3x-2}{x^3} = \left(\frac{-2}{-0}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{3x-2}{x^3} = \left(\frac{-2}{+0}\right) = -\infty.$$

x=0 – екінші ретті үзіліс нүктесі. x=0– вертикаль асимптота.

3) функцияның координат өстерімен қиылысу нүктелерін, таңба тұрақтылық аралығын табамыз.

$x \neq 0$, егер y=0 болса, онда $\dfrac{3x-2}{x^3}$=0. Осыдан $x = \dfrac{2}{3}$.

График Oy өсімен қиылыспайды, ал Ox өсін $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$ нүктесінде қиып өтеді. Функцияның таңба тұрақтылық интервалы



4) функцияның тақтығын, жұптығын және периодтылығын анықтаймыз

$$f(-x)=-\frac{3x+2}{(-x)^3}=\frac{3x+2}{x^3}\neq f(x)\neq -f(x).$$

Сондықтан берілген функция жалпы түрдегі функция. Функция периодты емес.

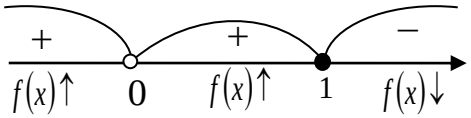
5) функцияның экстремумдарын тауып, өспелі және кемімелі болатын аралықтарын табамыз.

$$y'=\left(\frac{3x-2}{x^3}\right)'=\frac{3x^3-3x^2(3x-2)}{x^6}=\frac{3x^3-9x^3-6x^2}{x^6}=-\frac{6(x-1)}{x^4},$$

$$y'=0, \qquad x-1=0, \qquad x=1.$$

Егер x=1 - стационарлық нүкте болса, онда $(-\infty,0),(0,1)$ интервалында функция өспелі, $(1,+\infty)$ интервалында кемімелі.

x=1 максимум нүктесі: y_{max}=1.

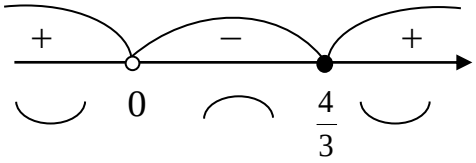


6) функцияның ойыс, дөңес болатын аралықтарын, иілу нүктелерін табамыз.

$$y''=-\frac{6(x-1)}{x^4}=-6\cdot\frac{x^4-4x^3(x-1)}{x^8}=-6\cdot\frac{x^4-4x^4+4x^3}{x^8}=\frac{6(3x-4)}{x^5}$$

$$y''=0, \qquad 3x-4=0 \qquad x=\frac{4}{3}$$

Егер $x=\frac{4}{3}$ болса, онда $\left(\frac{4}{3},\frac{27}{32}\right)$ - иілу нүктесі. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ интервалдарында график ойыс, ал $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ интервалында график дөңес болады.



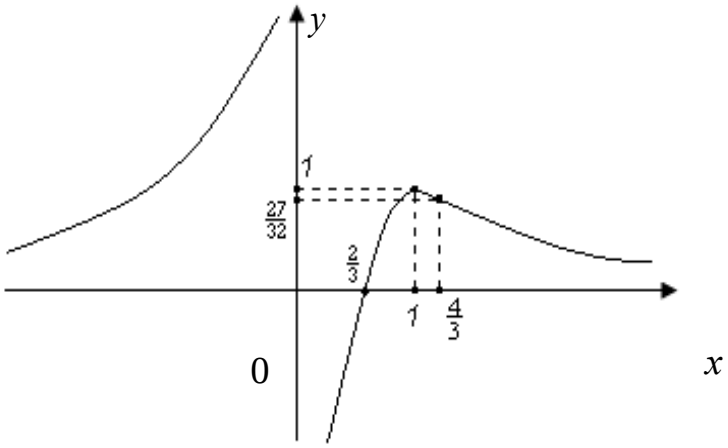
7) функцияның асимптоталарын табамыз.

а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2}{x^3}=\infty$ болғандықтан $x=0$ түзуі – тік асимптота.

ә) Көлбеу асимптотаны табу үшін

$$\mathrm{k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x^3 x} = 0,\ \mathrm{b} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{x^3} - 0\cdot x\right) = 0$$

мәндерін есептейміз. Демек, y=0 - горизонталь асимптота.
8) алынған мәліметтер бойынша функция графигін тұрғызамыз.



3. Лопиталь ережесін қолданып шекті есептеңіз:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Шешімі: Лопиталь ережесі $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left|\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Сондықтан:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{1/(1+x)} = \dfrac{1+1}{1} = 2;$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1/x}{2\cos x/\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{2x\cos x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x}{2\cos x - 2x\sin x} = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}.$