БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ (БӨЖ) ТАПСЫРМАЛАРЫ №2

2.1 «Вектолрлық алгебра элементтері мен жазықтықтағы аналитикалық геометрия» тақырыбына арналған типтік есептер

1. $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, $M_4(x_4;y_4;z_4)$ нүктелерінің координаталары берілген.

а) $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$, $\bar{b}=\overline{M_1M_3}$ және $\bar{c}=\overline{M_1M_4}$ - векторларының ұзындықтарын;

ә) $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустарын;

б) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін;

в) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторының арасындағы бұрышты;

г) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін;

ғ) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын;

д) $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін;

е) $M_1M_2M_3M_4$ - тетраэдрінің көлемін табыңыз.

1	$M_1(3;4;5)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(-2;-3;6)$, $M_4(3;-6;-3)$
2	$M_1(-7;-5;6)$, $M_2(-2;5;-3)$, $M_3(3;-2;4)$, $M_4(1;2;2)$
3	$M_1(1;3;1)$, $M_2(-1;4;6)$, $M_3(-2;-3;4)$, $M_4(3;4;-4)$
4	$M_1(2;4;1)$, $M_2(-3;-2;4)$, $M_3(3;5;-2)$, $M_4(4;2;-3)$
5	$M_1(-5;-3;-4)$, $M_2(1;4;6)$, $M_3(3;2;-2)$, $M_4(8;-2;4)$
6	$M_1(3;4;2)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(4;-3;6)$, $M_4(6;-5;3)$
7	$M_1(-4;6;3)$, $M_2(3;-5;1)$, $M_3(2;6;-4)$, $M_4(2;4;-5)$
8	$M_1(7;5;8)$, $M_2(-4;-5;3)$, $M_3(2;-3;5)$, $M_4(5;1;-4)$
9	$M_1(3;-2;6)$, $M_2(-6;-2;3)$, $M_3(1;1;-4)$, $M_4(4;6;-7)$
10	$M_1(-5;4;-3)$, $M_2(7;3;-1)$, $M_3(6;-2;0)$, $M_4(3;2;-7)$
11	$M_1(3;-5;-2)$, $M_2(-4;2;3)$, $M_3(1;5;7)$, $M_4(-2;-4;5)$
12	$M_1(7;4;9)$, $M_2(1;-2;-3)$, $M_3(-5;-3;0)$, $M_4(1;-3;4)$
13	$M_1(-4;-7;-3)$, $M_2(-4;-5;7)$, $M_3(2;-3;3)$, $M_4(3;2;1)$
14	$M_1(-4;-5;-3)$, $M_2(3;1;2)$, $M_3(5;7;-6)$, $M_4(6;-1;5)$
15	$M_1(5;2;4)$, $M_2(-3;5;7)$, $M_3(1;-5;8)$, $M_4(9;-3;5)$
16	$M_1(-6;4;5)$, $M_2(5;-7;3)$, $M_3(4;2;-8)$, $M_4(2;8;-3)$
17	$M_1(5;3;6)$, $M_2(-3;-4;4)$, $M_3(5;-6;8)$, $M_4(4;0;-3)$
18	$M_1(5;-4;4)$, $M_2(-4;-6;5)$, $M_3(3;2;-7)$, $M_4(6;2;-9)$

19	$M_1(-7;-6;-5),\ M_2(5;1;-3),\ M_3(8;-4;0),\ M_4(3;4;-7)$
20	$M_1(7;-1;-2),\ M_2(1;7;8),\ M_3(3;7;9),\ M_4(-3;-5;2)$
21	$M_1(5;2;7),\ M_2(7;-6;-9),\ M_3(-7;-6;3),\ M_4(1;-5;2)$
22	$M_1(-2;-5;-1),\ M_2(-6;-7;9),\ M_3(4;-5;1),\ M_4(2;1;4)$
23	$M_1(-6;-3;-5),\ M_2(5;1;7),\ M_3(3;5;-1),\ M_4(4;-2;9)$
24	$M_1(7;4;2),\ M_2(-5;3;-9),\ M_3(1;-5;3),\ M_4(7;-9;1)$
25	$M_1(-8;2;7),\ M_2(3;-5;9),\ M_3(2;4;-6),\ M_4(4;6;-5)$
26	$M_1(4;3;1),\ M_2(2;7;5),\ M_3(-4;-2;4),\ M_4(2;-3;-5)$
27	$M_1(-9;-7;4),\ M_2(-4;3;-1),\ M_3(5;-4;2),\ M_4(3;4;4)$
28	$M_1(3;5;3),\ M_2(-3;2;8),\ M_3(-3;-2;6),\ M_4(7;8;-2)$
29	$M_1(4;2;3),\ M_2(-5;-4;2),\ M_3(5;7;-4),\ M_4(6;4;-7)$
30	$M_1(-4;2;-3),\ M_2(2;5;7),\ M_3(6;3;-1),\ M_4(6;-4;1)$
31	$M_1(6;2;7),\ M_2(7;-6;-8),\ M_3(-7;-6;3),\ M_4(1;-2;2)$
32	$M_1(-3;-5;-1),\ M_2(-6;-7;9),\ M_3(5;-5;1),\ M_4(2;1;4)$
33	$M_1(-2;-3;-5),\ M_2(5;1;4),\ M_3(3;5;-1),\ M_4(3;-2;9)$
34	$M_1(5;4;2),\ M_2(-5;3;-9),\ M_3(1;-5;3),\ M_4(6;-9;1)$
35	$M_1(-2;2;7),\ M_2(3;-5;9),\ M_3(2;4;-6),\ M_4(2;6;-5)$
36	$M_1(3;3;1),\ M_2(2;6;5),\ M_3(-4;-2;4),\ M_4(2;-3;-5)$
37	$M_1(-5;-7;4),\ M_2(-4;1;-1),\ M_3(5;-4;2),\ M_4(3;4;4)$
38	$M_1(6;5;3),\ M_2(-6;2;8),\ M_3(-3;-2;6),\ M_4(7;8;-2)$
39	$M_1(2;2;3),\ M_2(-5;-4;2),\ M_3(3;7;-4),\ M_4(6;4;-7)$
40	$M_1(-4;5;-3),\ M_2(2;5;7),\ M_3(6;2;-1),\ M_4(6;-4;1)$

2. $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ үш векторы базис құрайтындығын көрсетіп, $\bar{d}$ векторын осы базистегі координаттарын табыңыз.

1	$\vec{a}=\{5;4;1\},\ \vec{b}=\{-3;5;2\},\ \vec{c}=\{2;-1;3\},\ \vec{d}=\{7;23;4\}$
2	$\vec{a}=\{2;-1;4\},\ \vec{b}=\{-3;0;-2\},\ \vec{c}=\{4;5;-3\},\ \vec{d}=\{0;11;-14\}$
3	$\vec{a}=\{-1;1;2\},\ \vec{b}=\{2;-3;-5\},\ \vec{c}=\{-6;3;-1\},\ \vec{d}=\{28;-19;-7\}$
4	$\vec{a}=\{1;3;4\},\ \vec{b}=\{-2;5;0\},\ c=\{3;-2;-4\},\ \vec{d}=\{13;-5;-4\}$
5	$\vec{a}=\{1;-1;1\},\ \vec{b}=\{-5;-3;1\},\ \vec{c}=\{2;-1;0\},\ \vec{d}=\{-15;-10;5\}$
6	$\vec{a}=\{3;1;2\},\ \vec{b}=\{-7;-2;-4\},\ \vec{c}=\{-4;0;3\},\ \vec{d}=\{16;6;15\}$
7	$\vec{a}=\{-3;0;1\},\ \vec{b}=\{2;7;-3\},\ \vec{c}=\{-4;3;5\},\ \vec{d}=\{-16;33;13\}$
8	$\vec{a}=\{5;1;2\},\ \vec{b}=\{-2;1;-3\},\ c=\{4;-3;5\},\ \vec{d}=\{15;-15;24\}$

9	$\vec{a}=\{0;2;-3\},\ \vec{b}=\{4;-3;-2\},\ \vec{c}=\{-5;-4;0\},\ \vec{d}=\{-19;-5;-4\}$
10	$\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{-2;3;1\},\ \vec{c}=\{4;-5;-3\},\ \vec{d}=\{-3;2;-3\}$
11	$\vec{a}=\{5;3;1\},\ \vec{b}=\{-1;2;-3\},\ \vec{c}=\{3;-4;2\},\ \vec{d}=\{-9;34;-20\}$
12	$\vec{a}=\{3;1;-3\},\ \vec{b}=\{-2;4;1\},\ \vec{c}=\{1;-2;5\},\ \vec{d}=\{1;12;-20\}$
13	$\vec{a}=\{6;1;-3\},\ \vec{b}=\{-3;2;1\},\ \vec{c}=\{-1;-3;4\},\ \vec{d}=\{15;6;-17\}$
14	$\vec{a}=\{4;2;3\},\ \vec{b}=\{-3;1;-8\},\ \vec{c}=\{2;-4;5\},\ \vec{d}=\{-12;14;-31\}$
15	$\vec{a}=\{-2;1;3\},\ \vec{b}=\{3;-6;2\},\ \vec{c}=\{-5;-3;-1\},\ \vec{d}=\{31;-6;22\}$
16	$\vec{a}=\{1;3;6\},\ \vec{b}=\{-3;4;-5\},\ \vec{c}=\{1;-7;2\},\ \vec{d}=\{-2;17;5\}$
17	$\vec{a}=\{7;2;1\},\ \vec{b}=\{5;1;-2\},\ \vec{c}=\{-3;4;5\},\ \vec{d}=\{26;11;1\}$
18	$\vec{a}=\{3;5;4\},\ \vec{b}=\{-2;7;-5\},\ \vec{c}=\{6;-2;1\},\ \vec{d}=\{6;-9;22\}$
19	$\vec{a}=\{5;3;2\},\ \vec{b}=\{2;-5;1\},\ \vec{c}=\{-7;4;-3\},\ \vec{d}=\{36;1;15\}$
20	$\vec{a}=\{11;1;2\},\ \vec{b}=\{-3;3;4\},\ \vec{c}=\{-4;-2;7\},\ \vec{d}=\{-5;11;-15\}$
21	$\vec{a}=\{9;5;3\},\ \vec{b}=\{-3;2;1\},\ \vec{c}=\{4;-7;4\},\ \vec{d}=\{-10;-13;8\}$
22	$\vec{a}=\{7;2;1\},\ \vec{b}=\{3;-5;6\},\ \vec{c}=\{-4;3;-4\},\ \vec{d}=\{-1;18;-16\}$
23	$\vec{a}=\{1;2;3\},\ \vec{b}=\{-5;3;-1\},\ \vec{c}=\{-6;4;5\},\ \vec{d}=\{-4;11;20\}$
24	$\vec{a}=\{-2;5;1\},\ \vec{b}=\{3;2;-7\},\ \vec{c}=\{4;-3;2\},\ \vec{d}=\{-4;22;-13\}$
25	$\vec{a}=\{3;1;2\},\ \vec{b}=\{-4;3;-1\},\ \vec{c}=\{2;3;4\},\ \vec{d}=\{14;14;20\}$
26	$\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{-2;4;1\},\ \vec{c}=\{4;-5;-1\},\ \vec{d}=\{-5;11;2\}$
27	$\vec{a}=\{4;5;1\},\ \vec{b}=\{1;3;1\},\ \vec{c}=\{-3;-6;7\},\ \vec{d}=\{19;33;0\}$
28	$\vec{a}=\{1;-3;1\},\ \vec{b}=\{-2;-4;3\},\ \vec{c}=\{0;-2;3\},\ \vec{d}=\{-8;-10;13\}$
29	$\vec{a}=\{5;7;-2\},\ \vec{b}=\{-3;1;3\},\ \vec{c}=\{1;-4;6\},\ \vec{d}=\{14;9;-1\}$
30	$\vec{a}=\{-1;4;3\},\ \vec{b}=\{3;2;-4\},\ \vec{c}=\{-2;-7;1\},\ \vec{d}=\{6;20;-3\}$
31	$\vec{a}=\{9;5;3\},\ \vec{b}=\{-3;2;1\},\ \vec{c}=\{4;-7;4\},\ \vec{d}=\{-10;-12;8\}$
32	$\vec{a}=\{7;2;1\},\ \vec{b}=\{3;-5;6\},\ \vec{c}=\{-4;3;-4\},\ \vec{d}=\{-1;17;-16\}$
33	$\vec{a}=\{1;2;3\},\ \vec{b}=\{-5;3;-1\},\ \vec{c}=\{-6;4;5\},\ \vec{d}=\{-4;11;19\}$
34	$\vec{a}=\{-2;5;1\},\ \vec{b}=\{3;2;-7\},\ \vec{c}=\{4;-3;2\},\ \vec{d}=\{-4;21;-13\}$
35	$\vec{a}=\{3;1;2\},\ \vec{b}=\{-4;3;-1\},\ \vec{c}=\{2;3;4\},\ \vec{d}=\{14;14;20\}$
36	$\vec{a}=\{3;-1;2\},\ \vec{b}=\{-2;4;1\},\ \vec{c}=\{4;-5;-1\},\ \vec{d}=\{-5;10;2\}$
37	$\vec{a}=\{4;5;1\},\ \vec{b}=\{1;3;1\},\ \vec{c}=\{-3;-6;7\},\ \vec{d}=\{19;5;0\}$
38	$\vec{a}=\{1;-3;1\},\ \vec{b}=\{-2;-4;3\},\ \vec{c}=\{0;-2;3\},\ \vec{d}=\{-8;-10;14\}$
39	$\vec{a}=\{5;7;-2\},\ \vec{b}=\{-3;1;3\},\ \vec{c}=\{1;-4;6\},\ \vec{d}=\{10;9;-1\}$

40	$\vec{a}=\{-1;4;3\},\ \vec{b}=\{3;2;-4\},\ \vec{c}=\{-2;-7;1\},\ \vec{d}=\{6;15;-3\}$

3. $M_1M_2M_3$ үшбұрышының $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\ M_3(x_3;y_3)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) M_1M_2 қабырғасының теңдеуін;

ә) M_1M_2 және M_1M_3 қабырғаларының арасындағы бұрышын;

б) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына параллель болатын түзудің теңдеуін;

в) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына перпендикуляр болатын түзудің (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің) теңдеуін;

г) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің ұзындығын (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына дейінгі ара қашықтықтын);

ғ) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың теңдеуін;

д) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың ұзындығын;

е) $M_1M_2M_3$ үшбұрыштың ауданын табыңыз.

1	$M_1(-2;4),\ M_2(3;1),\ M_3(10;7)$	2	$M_1(1;7),\ M_2(-3;-1),\ M_3(11;-3)$
3	$M_1(1;-2),\ M_2(7;1),\ M_3(3;7)$	4	$M_1(-4;2),\ M_2(-6;6),\ M_3(6;2)$
5	$M_1(4;-4),\ M_2(8;2),\ M_3(3;8)$	6	$M_1(1;-6),\ M_2(3;4),\ M_3(-3;3)$
7	$M_1(-5;2),\ M_2(0;-4),\ M_3(5;7)$	8	$M_1(-3;8),\ M_2(-6;2),\ M_3(0;-5)$
9	$M_1(4;1),\ M_2(-3;-1),\ M_3(7;-3)$	10	$M_1(3;--1),\ M_2(11;3),\ M_3(-6;2)$
11	$M_1(-1;-4),\ M_2(9;6),\ M_3(-5;4)$	12	$M_1(-3;-1),\ M_2(-4;-5),\ M_3(8;1)$
13	$M_1(7;-2),\ M_2(-3;-8),\ M_3(4;6)$	14	$M_1(7;0),\ M_2(1;4),\ M_3(-8;-4)$
15	$M_1(-5;1),\ M_2(8;-2),\ M_3(1;4)$	16	$M_1(-3;-2),\ M_2(14;4),\ M_3(6;8)$
17	$M_1(1;0),\ M_2(-1;4),\ M_3(9;5)$	18	$M_1(-2;-3),\ M_2(1;6),\ M_3(6;1)$
19	$M_1(4;-3),\ M_2(7;3),\ M_3(1;10)$	20	$M_1(-3;-3),\ M_2(5;-7),\ M_3(7;7)$
21	$M_1(-4;2),\ M_2(8;-6),\ M_3(2;6)$	22	$M_1(4;-4),\ M_2(6;2),\ M_3(-1;8)$
23	$M_1(6;-9),\ M_2(10;-1),\ M_3(-4;1)$	24	$M_1(-4;2),\ M_2(6;-4),\ M_3(4;10)$
25	$M_1(-7;2),\ M_2(-7;-4),\ M_3(5;5)$	26	$M_1(10;-2),\ M_2(4;-5),\ M_3(-3;1)$
27	$M_1(-2;-6),\ M_2(-3;5),\ M_3(4;0)$	28	$M_1(0;2),\ M_2(-7;-4),\ M_3(3;2)$
29	$M_1(1;-3),\ M_2(0;7),\ M_3(-2;4)$	30	$M_1(2;5),\ M_2(-3;1),\ M_3(0;4)$
31	$M_1(-4;2),\ M_2(7;-6),\ M_3(2;6)$	32	$M_1(4;-4),\ M_2(5;2),\ M_3(-1;8)$
33	$M_1(6;-8),\ M_2(10;-1),\ M_3(-4;1)$	34	$M_1(-4;2),\ M_2(6;-4),\ M_3(4;9)$

35	$M_1(-8;2),\ M_2(-8;-4),\ M_3(5;5)$	36	$M_1(11;-2),\ M_2(4;-5),\ M_3(-3;1)$
37	$M_1(-2;-5),\ M_2(-3;5),\ M_3(4;0)$	38	$M_1(0;2),\ M_2(-6;-4),\ M_3(3;2)$
39	$M_1(1;-3),\ M_2(0;8),\ M_3(-2;4)$	40	$M_1(2;6),\ M_2(-3;1),\ M_3(0;4)$

4. Екінші ретті қисықтарының сызбасын көрсетіңіз.

№	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
1	$a=2,\ b=3,\ R=3$	$a=5,\ b=3$	$a=7,\ b=5$	$p=2$
2	$a=-3,\ b=5,\ R=2$	$a=7,\ b=2$	$a=5,\ b=4$	$p=3{,}5$
3	$a=-1,\ b=2,\ R=4$	$a=6,\ b=5$	$a=4,\ b=3$	$p=2{,}5$
4	$a=3,\ b=-4,\ R=5$	$a=5,\ b=4$	$a=8,\ b=5$	$p=8$
5	$a=-3,\ b=-3,\ R=2$	$a=7,\ b=5$	$a=6,\ b=3$	$p=1{,}5$
6	$a=1,\ b=-1,\ R=1$	$a=4,\ b=2$	$a=6,\ b=5$	$p=-4{,}5$
7	$a=-2,\ b=1,\ R=6$	$a=3,\ b=2$	$a=4,\ b=2$	$p=1$
8	$a=4,\ b=-2,\ R=7$	$a=7,\ b=6$	$a=5,\ b=3$	$p=3$
9	$a=-4,\ b=4,\ R=3$	$a=6,\ b=3$	$a=4,\ b=6$	$p=-1$
10	$a=5,\ b=-1,\ R=2$	$a=8,\ b=3$	$a=7,\ b=3$	$p=-4$
11	$a=-5,\ b=-6,\ R=4$	$a=5,\ b=2$	$a=6,\ b=8$	$p=4$
12	$a=1,\ b=-5,\ R=1$	$a=6,\ b=4$	$a=5,\ b=2$	$p=0{,}5$
13	$a=3,\ b=2,\ R=6$	$a=8,\ b=5$	$a=6,\ b=2$	$p=-5$
14	$a=-2,\ b=-4,\ R=7$	$a=7,\ b=4$	$a=8,\ b=6$	$p=-7$
15	$a=3,\ b=2,\ R=3$	$a=3,\ b=5$	$a=5,\ b=7$	$p=-2$
16	$a=5,\ b=-3,\ R=2$	$a=2,\ b=7$	$a=4,\ b=5$	$p=5$
17	$a=-1,\ b=-1,\ R=4$	$a=5,\ b=6$	$a=3,\ b=4$	$p=-5{,}5$
18	$a=-4,\ b=3,\ R=5$	$a=4,\ b=5$	$a=5,\ b=8$	$p=6$
19	$a=3,\ b=3,\ R=2$	$a=5,\ b=7$	$a=9,\ b=6$	$p=-3{,}5$
20	$a=-1,\ b=1,\ R=1$	$a=2,\ b=4$	$a=2,\ b=3$	$p=2$
21	$a=1,\ b=-2,\ R=6$	$a=2,\ b=3$	$a=3,\ b=5$	$p=-0{,}5$
22	$a=-2,\ b=4,\ R=7$	$a=7,\ b=4$	$a=6,\ b=4$	$p=5{,}5$
23	$a=4,\ b=-4,\ R=2$	$a=8,\ b=6$	$a=8,\ b=4$	$p=-3$
24	$a=-1,\ b=5,\ R=2$	$a=6,\ b=7$	$a=2,\ b=4$	$p=-1{,}5$
25	$a=6,\ b=-5,\ R=4$	$a=2,\ b=6$	$a=3,\ b=2$	$p=-8$
26	$a=-5,\ b=1,\ R=1$	$a=3,\ b=4$	$a=9,\ b=3$	$p=7$
27	$a=3,\ b=-1,\ R=5$	$a=8,\ b=4$	$a=3,\ b=6$	$p=-6$
28	$a=2,\ b=3,\ R=6$	$a=3,\ b=7$	$a=2,\ b=5$	$p=6{,}5$
29	$a=-4,\ b=-2,\ R=7$	$a=6,\ b=8$	$a=7,\ b=5$	$p=4{,}5$

30	$a=0,\ b=-1,\ R=2$	$a=4,\ b=6$	$a=5,\ b=6$	$p=7{,}5$
31	$a=1,\ b=-2,\ R=6$	$a=2,\ b=3$	$a=3,\ b=5$	$p=-1{,}5$
32	$a=-2,\ b=4,\ R=7$	$a=7,\ b=4$	$a=6,\ b=4$	$p=4{,}5$
33	$a=4,\ b=-4,\ R=2$	$a=8,\ b=6$	$a=8,\ b=4$	$p=-2$
34	$a=-1,\ b=5,\ R=2$	$a=6,\ b=7$	$a=2,\ b=4$	$p=-2{,}5$
35	$a=6,\ b=-5,\ R=4$	$a=2,\ b=6$	$a=3,\ b=2$	$p=-7$
36	$a=-5,\ b=1,\ R=1$	$a=3,\ b=4$	$a=9,\ b=3$	$p=3$
37	$a=3,\ b=-1,\ R=5$	$a=8,\ b=4$	$a=3,\ b=6$	$p=-4$
38	$a=2,\ b=3,\ R=6$	$a=3,\ b=7$	$a=2,\ b=5$	$p=5{,}5$
39	$a=-4,\ b=-2,\ R=7$	$a=6,\ b=8$	$a=7,\ b=5$	$p=3{,}5$
40	$a=1,\ b=-1,\ R=2$	$a=4,\ b=7$	$a=5,\ b=7$	$p=8{,}5$

2.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $M_1(-1;0;1)$, $M_2(0;4;4)$, $M_3(7;6;5)$, $M_4(3;-3;4)$ нүктелерінің координаталары берілген.

а) $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$, $\bar{b}=\overline{M_1M_3}$ және $\bar{c}=\overline{M_1M_4}$ векторларының ұзындықтарын;

ә) $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустарын;

б) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін;

в) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторының арасындағы бұрышты;

г) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін;

ғ) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын;

д) $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін;

е) $M_1M_2M_3M_4$ пирамидасының көлемін табыңыз.

Шешімі: а) $\bar{a}=\overline{M_1M_2}$, $\bar{b}=\overline{M_1M_3}$ және $\bar{c}=\overline{M_1M_4}$ - векторларының ұзындықтарын табамыз.

$$\bar{a}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}=\{0-(-1);\ 4-0;\ 4-1\}=\{1,\ 4,\ 3\};$$

$$\bar{b}=\overline{M_1M_3}=\{7-(-1);\quad 6-0;\quad 5-1\}=\{8,6,4\};$$

$$\bar{c}=\overline{M_1M_4}=\{3-(-1);(-3)-0;4-1\}=\{4;-3;3\};$$

$$|a|=\sqrt{1^2+4^2+3^2}=\sqrt{26};$$

$$|b|=\sqrt{8^2+6^2+4^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29};$$

$$|c|=\sqrt{4^2+3^2+3^2}=\sqrt{41}.$$

ә) $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустарын табамыз:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{4}{\sqrt{26}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{3}{\sqrt{26}},$$

б) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының $\bar{a}\cdot\bar{b}$ скалярлық көбейтіндісін табамыз.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=1\cdot 8+4\cdot 6+3\cdot 4=8+24+12=44$$

в) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының арасындағы α бұрышын анықтаймыз.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\alpha,\quad \cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{44}{\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{29}}=\frac{22}{\sqrt{754}},\quad \alpha=\arccos\frac{22}{\sqrt{754}}.$$

г) $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының $\bar{a}\times\bar{b}$ векторлық көбейтіндісі:

$$\bar{c}=[\bar{a}\times\bar{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}a_y&a_z\\ b_y&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z&a_x\\ b_z&b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\ b_x&b_в\end{vmatrix}\right\}=\left\{\begin{vmatrix}4&3\\ 6&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\ 4&8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&4\\ 8&6\end{vmatrix}\right\}=\{-2;20;-26\}.$$

ғ) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданы:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+20^2+(-26)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1080}=3\sqrt{30}\,.$$

д) $\bar{a}=\{1,4,3\};\ \bar{b}=\{8,6,4\};\ \bar{c}=\{4;-3;3\}$ болса, $\bar{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі:

$$\bar{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&3\\ 8&6&4\\ 4&-3&3\end{vmatrix}=1\cdot 6\cdot 3+4\cdot 4\cdot 4+3\cdot 8\cdot(-3)-3\cdot 6\cdot 4-4\cdot 8\cdot 3-1\cdot 4\cdot(-3)=$$

$$=18+64-72-72-96+12=-146.$$

е) $M_1M_2M_3M_4$-пирамидасының көлемін табамыз. Ол үшін үш вектордың аралас көбейтіндіні пайдаланамыз, яғни

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-146|=\frac{73}{3}.$$

2. $\bar{a}=\{2;4;-6\},\ \bar{b}=\{1;3;5\},\ \bar{c}=\{0;-3;7\}$ векторларының базис құрайтындығын көрсету керек және осы базисте $\bar{d}=\{3;2;52\}$ векторын жіктеп, координаталарын табу керек.

Шешімі: Егер үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең болмаса, яғни $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\neq 0,$ олар базис құрайды.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&0\\ 4&3&-3\\ -6&5&7\end{vmatrix}=62\neq 0,$$

сондықтан үш $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ векторлары базис құрады.

Осы базисте $\bar{d}$ векторы $\bar{d}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}$ түрінде жіктеледі. Бұл векторлық түрдегі өрнекті матрицалық түрде жазсақ:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\52\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\7\end{pmatrix},\ \text{онда}\ \begin{cases}2\alpha+\beta=3\\4\alpha+3\beta-3\gamma=2\\-6\alpha+5\beta+7\gamma=52\end{cases}.$$

Осы жүйенің шешімі $\alpha=-1,\ \beta=5,\ \gamma=3$. Сондықтан $\bar{d}$ векторының $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ базисіндегі координаталары $\{-1;5;3\}$, яғни

$$\bar{d}=-\bar{a}+5\bar{b}+3\bar{c}.$$

3. $M_1M_2M_3$ үшбұрышының $M_1(-3;2),\ M_2(3;6),\ M_3(5;-4)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) M_1M_2 қабырғасының теңдеуін;

ә) M_1M_2 және M_1M_3 қабырғаларының арасындағы бұрышын;

б) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына параллель болатын түзудің теңдеуін;

в) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына перпендикуляр болатын түзудің (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің) теңдеуін;

г) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктігінің ұзындығын (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына дейінгі ара қашықтықтың);

ғ) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың теңдеуін;

д) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың ұзындығын;

е) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданын табыңыз.

Шешімі: а) Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуінің формуласын пайдаланамыз.

$$\frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{6-2}\ \Rightarrow\ 2(x+3)=3(y-2)\ \Rightarrow\ 2x+6=3y-6$$

Бұдан M_1M_2 түзуінің жалпы теңдеуі: $2x-3y+12=0$.

M_1M_2 түзуінің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі $y=\frac{2}{3}x+4$, мұндағы $k_{12}=\frac{2}{3}$.

ә) M_1M_2 түзуінің теңдеуі белгілі. Енді M_1M_3 қабырғаларының теңдеуін табамыз.

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-2}{-4-2}\Rightarrow\ -3(x+3)=4(y-2)\Rightarrow\ -3x-9=4y-8\ \Rightarrow\ 3x+4y+1=0$$

M_1M_3 түзуінің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$, мұндағы $k_{13}=-\frac{3}{4}$.

Енді $\angle M_2M_1M_3=\alpha$ бұрышын табу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$tg\alpha=\frac{k_{12}-k_{13}}{1+k_{12}\cdot k_{13}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{17}{6},\qquad \alpha=arctg\frac{17}{6}.$$

б) Алдымен M_2M_3 қабырғасының теңдеуін табамыз.

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-6}{-4-6}\ \Rightarrow\quad -5(x-3)=y-6\ \Rightarrow\ 5x+y-21=0.$$

M_2M_3 түзуінің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі $y=-5x+21$, мұндағы $k_{23}=-5$. Олай болса, M_1 нүктесі арқылы өтетін және осы түзуге параллель болатын түзудің теңдеуі

$$y-y_1=-5(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-2=-5(x+3)\ \Rightarrow\quad y=-5x-13$$

болады.

в) M_2M_3 түзуінің бұрыштық коэффициенті $k_{23}=-5$ болса, онда M_1 нүктесі арқылы өтетін және осы түзуге перпендикуляр болатын түзудің бұрыштық коэффициенті $k_1=-\frac{1}{k_{23}}=\frac{1}{5}$, онда оның теңдеуі:

$$y-y_1=\frac{1}{5}(x-x_1)\qquad y-2=\frac{1}{5}(x+3)\qquad y=\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}.$$

г) M_2M_3 түзуінің жалпы теңдеуі $5x+y-21=0$. Бұдан нүктеден түзуге дейінгі қашықтығының формуласын қолдансақ:

$$d=h_1=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{5\cdot(-3)+1\cdot2-21}{\sqrt{25+1}}\right|=\left|\frac{-15+2-21}{\sqrt{26}}\right|=\frac{17\sqrt{26}}{13}.$$

ғ) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына жүргізілген медианаңың теңдеуін жазамыз. Ол үшін алдымен M_2M_3 қабырғасының ортасының (E нүктесінің) координатасын табамыз

$$x_E=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{3+5}{2}=4;\qquad y_E=\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{6-4}{2}=1\qquad E=(4;1)$$

Енді медиана M_1E теңдеуін екі нүкте арқылы өтетін түзудің формуласын пайдаланып жазамыз:

$$\frac{x-x_1}{x_E-x_1}=\frac{y-y_1}{y_E-y_1},\qquad \frac{x+3}{4+3}=\frac{y-2}{1-2},\quad -x-3=7y-14,\qquad x+7y-11=0.$$

д) M_1 нүктесінен жүргізілген медианаңың ұзындығы:

$$|M_1E| = \sqrt{(x_E - x_1)^2 + (y_E - y_1)^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

е) $M_1M_2M_3$ үшбұрышының ауданы:

$$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3+3 & 6-2 \\ 5+3 & -4-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -34$$

$S = 34.$

4. Төмендегі екінші ретті қисықтардың сызбасын көрсетіңіз.

$$(x-7)^2 + (y+8)^2 = 81, \qquad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \qquad \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1, \qquad y^2 = 10x.$$

Шешімі: $(x-7)^2 + (y+8)^2 = 81$ центрі $C(7;-8)$ нүктесінде жататын, радиусы $R = 9$ –ға тең шеңбердің теңдеуі (суретін салу керек).

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ эллипстің теңдеуі болады. Оның жарты өстері $a = 10, b = 8$-ге тең болады. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 64} = 6,$ олай болса, эллипстің фокустары $F_1(6;0), F_2(-6;0),$ ал эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}6$ –ке тең болады (суретін салу керек).

$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ гиперболаның теңдеуі болады. Оның нақты жарты өсі $a = 12$-ге, жорамал жарты өсі $b = 5$-ке тең болады. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 25} = 13,$ олай болса, гиперболаның фокустары $F_1(13;0), F_2(-13;0),$ ал эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$ –ге тең болады (суретін салу керек). $y^2 = 10x$ параболаның теңдеуі болады. Параболаның симметрия өсі $0x,$ ал фокусы $F(2{,}5;0)$, директрисасының теңдеуі $y = 2{,}5$ болады (суретін салу керек).