БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ (БӨЖ) ТАПСЫРМАЛАРЫ №1

1.1 «Сызықтық алгебра элементтері» тақырыбына арналған типтік есептер

1. Үшінші ретті анықтауыш берілген.

а) a_{32}, a_{13} элементтерінің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын;

ә) анықтауышты бірінші жол элементтері бойынша;

б) анықтауышты екінші баған элементтері бойынша;

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептеңіз.

1	$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 6 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & -4 & 5 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix}$

22	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -4 & 5 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
31	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$	32	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	33	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$
34	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	35	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 2 \\ -6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	36	$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$
37	$\begin{vmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$	38	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	39	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$
40	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$				

2. Берілген төртінші ретті анықтауышты есептеңіз.

1	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

7	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
31	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	32	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	33	$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

34	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$	35	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	36	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
37	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	38	$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	39	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
40	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$				

3. A және B матрицалары берілген.
Табу керек: а) $A \cdot B$; ә) $B \cdot A$; б) A^{-1}; в) $A \cdot A^{-1}$.

1	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

	$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$		$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

	$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$		$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	22	$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -5 & -1\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 1 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$	24	$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$	26	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 3 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 1 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}$
31	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$	32	$A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$

	$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$		$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$
33	$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$	34	$A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$
35	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$	36	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 5 & 5 & 2\end{pmatrix}$
37	$A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 7 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}$	38	$A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ -1 & 7 & 2\end{pmatrix}$
39	$A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 25\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$	40	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 6 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

4. Матрицаның рангісін табыңыз.

1	$\begin{pmatrix}-1 & 4 & -6 & 1\\ 8 & -2 & -7 & -2\\ -7 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 8\\ 2 & -4 & -3 & -1\\ 1 & 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 6\\ 2 & 5 & 1 & -2\\ 1 & 7 & -10 & 20\end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

7	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 15 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & -8 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 5 \\ 4 & -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 18 & -6 \\ -1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 1 \\ 8 & -2 & -5 & -2 \\ -7 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
34	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	38	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	39	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \\ -1 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

40	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$				

5. Берілген теңдеулер жүйесін а) Крамер әдісімен; ә) Матрицалық әдіспен; б) Гаусс әдісімен шешіңіз.

1	$\begin{cases} 3x+2y+z=10 \\ 2x+3y+z=11 \\ 2x+y+3z=13 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+3y-4z=5 \\ 3x-2y-5z=-12 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 7x+4y+z=49 \\ 3x+2y+3z=29 \\ 2x-3y+z=12 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+4y-z=22 \\ 4x-y+5z=39 \\ 3y-7z=12 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 4x-3y+2z=6 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 5x+6y-2z=8 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ 4x+y+4z=9 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x+2y-4z=12 \\ x+3z=19 \\ 2x-3y+z=-5 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x+3y+4z=45 \\ 7x-5y=10 \\ 4x+11z=75 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 2x-y-z=3 \\ 3x+4y-2z=15 \\ 3x+2y+4z=17 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x+2y+2z=9 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+5y+z=4 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3x+4y-2z=22 \\ 2x-y-z=5 \\ 3x-2y+4z=28 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x-y-z=7 \\ x+2y-4z=-8 \\ 5x+y+2z=47 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 7x-5y=4 \\ 4x+11z=30 \\ 2x+3y+4z=18 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x+2y+z=15 \\ 3x-5y+3z=-10 \\ 2x+7y-z=42 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ x+y+2z=6 \\ 4x+y+4z=9 \end{cases}$
16	$\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ x+y+2z=6 \\ 4x+y+4z=9 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 8x+3y-6z=20 \\ -4x-y+3z=-10 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x-2y+3z=13 \\ 2x+3y-4z=-7 \\ 3x-2y-5z=-13 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3x-2y-5z=-24 \\ 2x+3y-4z=6 \\ x-2y+3z=12 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -3x+5y+z=9 \\ 3x+y+z=15 \\ x-4y-2z=-15 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 4x-3y+2z=12 \\ 2x-5y-3z=-24 \\ 5x+6y-2z=36 \end{cases}$
22	$\begin{cases} 4x-3y+2z=-10 \\ 2x+5y-3z=17 \\ 5x+6y-2z=22 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x+y+z=15 \\ x-4y-2z=-24 \\ -3x+5y+6z=44 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 5x+2y-4z=12 \\ x+3z=9 \\ 2x-3y+z=-5 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x+y-z=5 \\ 4x-3y+z=9 \\ 3x+y-z=13 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 7x+4y+z=39 \\ 3x+2y+3z=29 \\ 2x-3y+z=12 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x+4y-z=22 \\ 4x-y+5z=29 \\ 3y-7z=12 \end{cases}$
28	$\begin{cases} 2x+3y+4z=45 \\ 7x-5y=10 \\ 4x+11z=35 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 5x+8y+z=36 \\ 2x-3y+2z=10 \\ x+2y+3z=22 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 3x+4y+2z=25 \\ 2x-4y-3z=-1 \\ x+5y+z=16 \end{cases}$

31	$\begin{cases} 3x+4y-2z=22 \\ 2x-y-z=5 \\ 3x-2y+4z=18 \end{cases}$	32	$\begin{cases} 3x-y-z=7 \\ x+2y-4z=-8 \\ 5x+y+2z=17 \end{cases}$	33	$\begin{cases} x+y-z=7 \\ 8x+3y-6z=35 \\ 4x+y-3z=15 \end{cases}$
34	$\begin{cases} x-4y-2z=-2 \\ 3x+y+z=21 \\ 3x-5y-6z=1 \end{cases}$	35	$\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ x+y+2z=-6 \\ 4x+y+4z=9 \end{cases}$	36	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=16 \\ 4x+y+4z=14 \end{cases}$
37	$\begin{cases} x+2y+4z=20 \\ 5x+y+2z=37 \\ 3x-y+z=17 \end{cases}$	38	$\begin{cases} 3x-2y-5z=-12 \\ 2x+3y-4z=6 \\ x-2y+3z=12 \end{cases}$	39	$\begin{cases} -3x+5y+z=9 \\ 3x+y+z=3 \\ x-4y-2z=-15 \end{cases}$
40	$\begin{cases} 7x-5y=-3 \\ 4x+11z=70 \\ 2x+3y+4z=32 \end{cases}$				

6. Біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табыңыз:

1	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \end{cases}$	3	$\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 4x-7y+z=0 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 5x-3y+4z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 8x-y+3z=0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 2x-4y+z=0 \\ 3x-2y-4z=0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+7y-3z=0 \\ 3x-5y+z=0 \\ 5x+9y-5z=0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 4x+3y-7z=0 \\ 5x+y-z=0 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 4x+y+4z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 7x-y+3z=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x+y-2z=0 \\ 3x+2y-3z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 6x+y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 4x+4y+3z=0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x+3y+4z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 3x+2y-3z=0 \\ 5x+y-z=0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ 2x-2y+3z=0 \\ 5x+7y-3z=0 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ 2x-3y-7z=0 \\ 3x+2y-6z=0 \end{cases}$
16	$\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 3x+5y-4z=0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 5x+4y-6z=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ 3x+2y-5z=0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x-8y+7z=0 \\ 4x-3y+3z=0 \\ 3x+5y-4z=0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 4x-y+5z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 7x+3y-2z=0 \\ 2x+4y-3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x-3y-4z=0 \\ 5x-8y-2z=0 \\ 2x+y+10z=0 \end{cases}$

22	$\begin{cases}7x-6y-z=0\\4x-3y-5z=0\\3x-3y+4z=0\end{cases}$	23	$\begin{cases}x-3y+5z=0\\x+2y-3z=0\\2x-y+2z=0\end{cases}$	24	$\begin{cases}x-3y+2z=0\\2x-y+z=0\\4x-7y+8z=0\end{cases}$
25	$\begin{cases}x-5y+3z=0\\4x+3y-2z=0\\6x-7y+4z=0\end{cases}$	26	$\begin{cases}4x-3y+2z=0\\2x+5y+3z=0\\6x+2y+5z=0\end{cases}$	27	$\begin{cases}x+7y-3z=0\\3x-5y+z=0\\5x+9y-5z=0\end{cases}$
28	$\begin{cases}x-2y+z=0\\4x+3y-z=0\\5x+y-6z=0\end{cases}$	29	$\begin{cases}x+5y-4z=0\\2x-4y+3z=0\\4x+6y-5z=0\end{cases}$	30	$\begin{cases}x+y+z=0\\2x-3y+4z=0\\3x-2y+5z=0\end{cases}$
31	$\begin{cases}6x+5y+z=0\\2x+y-z=0\\4x+4y+3z=0\end{cases}$	32	$\begin{cases}4x+3y+4z=0\\2x+2y+z=0\\3x+2y-z=0\end{cases}$	33	$\begin{cases}x-2y+z=0\\3x+3y+5z=0\\4x+y+6z=0\end{cases}$
34	$\begin{cases}2x+y-3z=0\\x+2y-4z=0\\x-y+z=0\end{cases}$	35	$\begin{cases}x+5y+z=0\\2x-3y-7z=0\\3x+2y-6z=0\end{cases}$	36	$\begin{cases}5x+2y-2z=0\\2x-3y+z=0\\3x+5y-4z=0\end{cases}$
37	$\begin{cases}2x-y+2z=0\\4x+y+5z=0\\2x+2y+3z=0\end{cases}$	38	$\begin{cases}3x-2y+z=0\\2x+3y-5z=0\\5x+y-4z=0\end{cases}$	39	$\begin{cases}4x-y+5z=0\\2x-3y+z=0\\2x+2y+3z=0\end{cases}$
40	$\begin{cases}7x+3y-z=0\\2x+4y-3z=0\\3x-5y+4z=0\end{cases}$				

1.2 БӨЖ орындау үлгісі

1. $\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\4 & -3 & 0\\2 & 3 & -1\end{vmatrix}$ анықтауышы берілген.

а) a_{32}, a_{13} элементтерінің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын;

ә) анықтауышты бірінші жол элементтерінің жіктелуі бойынша;

б) анықтауышты екінші баған элементтерінің жіктелуі бойынша;

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептеңіз.

Шешімі: а) a_{32} және a_{13} элементтерінің M_{32} және M_{13} минорларын есептейміз:

$$M_{32}=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=5\cdot 0-(-2)\cdot 4=8$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-(-3)\cdot 2=18$$

Енді осы элементтердің алгебралық толықтауыштарын есептейміз:

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 8=-8;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 18=18.$$

ә) анықтауышты бірінші жол элементтерінің жіктелуі бойынша есептейміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot 3-4\cdot(-4)-2\cdot 18=-5;$$

б) анықтауышты екінші баған элементтерінің жіктелуі бойынша есептейміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot(-4)+(-3)\cdot(-1)-3\cdot 8=-5;$$

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептейміз.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=5\cdot(-3)\cdot(-1)+4\cdot 0\cdot 2+(-2)\cdot 4\cdot 3-(-2)\cdot(-3)\cdot 2-4\cdot 4\cdot(-1)-5\cdot 0\cdot 3=15-24-12+16=-5.$$

2. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & 4 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешімі: Келесі түрлендірулерді жасаймыз:

1-ші жол элементтерін 2-ге көбейтіп, 2-ші жолдың сәйкес элементтеріне;

1-ші жол элементтерін (-3)-ке көбейтіп, 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне;

1-ші жол элементтерін (-4)-ке көбейтіп, 4-ші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}$$

анықтауышын аламыз. Бұл анықтауышты 1-ші баған элементтері бойынша жіктейміз:

$$\Delta = 1 \cdot A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -2 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 5 & 5 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}$$

2-ші жол элементтерін 5-ке көбейтіп, 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне;

2-ші жол элементтерін (-5)-ке көбейтіп, 1-ші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -23 & -14 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 11 & 8 \end{vmatrix}$$

анықтауышын аламыз.

Бұл анықтауышты 1-ші баған элементтеріне жіктеп есептейміз:

$$\Delta = -2 \cdot 1 \cdot A_{21} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -23 & -14 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-23 \cdot 8 + 14 \cdot 11) = 2 \cdot (-184 + 154) = -60.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген.

Табу керек: а) $A \cdot B$; ә) $B \cdot A$; б) A^{-1}; в) $A \cdot A^{-1}$.

Шешімі:

а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-5) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-1)(-5) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ 2 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

ә) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)2+(-2)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)(-1)+(-2)\cdot 0 & 2(-1)+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 1 \\ 3\cdot 2+(-5)2+4\cdot 1 & 3\cdot 1+(-5)\cdot(-1)+4\cdot 0 & 3\cdot(-1)+(-5)\cdot 1+4\cdot 1 \\ 1\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

б) A матрицасына A^{-1} кері матрицасын

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

формуласымен анықтаймыз. A^{-1} - тек қана $\Delta(A) \neq 0$ болған жағдайда ғана табылады.

$\Delta(A)$ анықтауышын есептейміз:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2+1+0-1-2-0 = -4 \neq 0,$$

яғни кері матрицасы бар болады.

Енді барлық алгебралық толықтауыштарды есептейміз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1 = 0;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2-2 = -4.$$

A^{-1} кері матрицасын жоғарыда көрсетілген формула бойынша табайық:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

в) $A^{-1}\cdot A = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1\cdot 2+(-1)\cdot 2+0\cdot 1 & -1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0 & -1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+0\cdot 1 \\ -1\cdot 2+3\cdot 2+(-4)\cdot 1 & -1\cdot 1+3\cdot(-1)+(-4)\cdot 0 & -1\cdot(-1)+3\cdot 1+(-4)\cdot 1 \\ 1\cdot 2+1\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)+(-4)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1+(-4)\cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табу керек.

Шешімі: 1-ші жол элементтерін (-2)-ге, (-1)-ге көбейтіп, сәйкес 2-ші жолдың, 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 1-ші бағанның элементтерін (-3)-ке, 1-ге, 2-ге көбейтіп, сәйкес екінші, үшінші, төртінші бағандардың сәйкес элементтеріне қосамыз:

$$r(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Енді 2-ші жол элементтерін 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 2-ші бағанның элементтерін (-6)-ға, 1-ге көбейтіп, сәйкес үшінші, төртінші бағандардың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 3-ші бағанның элементтерінің барлығы 0-ге тең болғандықтан, оны алып тастаймыз:

$$r(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

матрица рангісі 3-ке тең, себебі

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

5. $\begin{cases} x+2y-3z=-20 \\ -4x+5y+6z=11 \\ 7x+8y+9z=28 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін

а) Крамер әдісімен; ә) Матрицалық әдіспен; б) Гаусс әдісімен шешіңіз

Шешімі:

а) *Крамер әдісі*

Бұл әдіс бойынша төрт анықтауышты есептейміз. Жүйенің анықтауышы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+(-3)\cdot(-4)\cdot8-(-3)\cdot5\cdot7-2\cdot(-4)\cdot9-1\cdot8\cdot6=$$

$$=45+84+96+105+72-48=402-48=354,$$

Δ анықтауышының бірінші бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -20 & 2 & -3 \\ 11 & 5 & 6 \\ 28 & 8 & 9 \end{vmatrix}=(-20)\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot28+11\cdot8\cdot(-3)-(-3)\cdot5\cdot28-2\cdot11\cdot9-(-20)\cdot6\cdot8=$$

$$=-900+336-264+420-198+960=1716-1362=354,$$

Δ анықтауышының екінші бағанын бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -20 & -3 \\ -4 & 11 & 6 \\ 7 & 28 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot11\cdot9+(-20)\cdot6\cdot7+(-3)\cdot(-4)\cdot28-(-3)\cdot11\cdot7-(-20)\cdot(-4)\cdot9-1\cdot6\cdot28=\Delta$$

$$=99-840+336+231-720-168=666-1728=-1062,$$

анықтауышының үшінші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырып, есептейік:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -20 \\ -4 & 5 & 11 \\ 7 & 8 & 28 \end{vmatrix}=1\cdot5\cdot28+2\cdot11\cdot7+(-20)\cdot(-4)\cdot8-(-20)\cdot5\cdot7-2\cdot(-4)\cdot28-1\cdot11\cdot8=$$

$$=140+154+640+700+224-88=1858-88=1770,$$

Сонымен,

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{354}{354}=1;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-1062}{354}=-3;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1770}{354}=5.$$

Жауабы: $x=1,\ y=-3,\ z=5.$

ә) *Матрицалық әдіс.*

$AX=B$ теңдеудің шешімі $X=A^{-1}\cdot B$, мұндағы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-20\\ 11\\ 28\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=354\neq 0.$$

A матрицасының алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}=45-48=-3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}=-(-36-42)=78;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-32-35=-67;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-(18+24)=-42;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 7 & 9\end{vmatrix}=9+21=30;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-(8-14)=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=12+15=27;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -4 & 6\end{vmatrix}=-(6-12)=6;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 5\end{vmatrix}=5+8=13.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{354}\begin{pmatrix}-3 & -42 & 27\\ 78 & 30 & 6\\ -67 & 6 & 13\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{354}\begin{pmatrix}-3 & -42 & 27\\ 78 & 30 & 6\\ -67 & 6 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-20\\ 11\\ 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot(-20)+(-42)\cdot 11+27\cdot 28\\ 78\cdot(-20)+30\cdot 11+6\cdot 28\\ -67\cdot(-20)+6\cdot 11+13\cdot 28\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{354}\begin{pmatrix} 60-462+756 \\ -1560+330+168 \\ 1340+66+364 \end{pmatrix} = \frac{1}{354}\begin{pmatrix} 354 \\ -1062 \\ 1770 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Жауабы: $x = 1,\ y = -3,\ z = 5.$

б) *Гаусс әдісі.*

Жүйенің кеңейтілген матрицасын қарастырамыз:

$$A^k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -20 \\ -4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 28 \end{array}\right).$$

Бірінші жолдың элементтерін 4-ке көбейтіп, екінші жолдың сәйкес элементтеріне қоссақ және бірінші жолдың элементтерін (-7)-ге көбейтіп үшінші жолға қоссақ төмендегі матрицаны аламыз:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 13 & -6 & -69 \\ 0 & -6 & 30 & 168 \end{array}\right),$$

екінші жолдың элементтерін 6-ға, ал үшінші жолдың элементтерін 13-ке көбейтіп қоссақ онда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 13 & -6 & -69 \\ 0 & 0 & 354 & 1770 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 13 & -6 & -69 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

Енді үшінші жолды 6-ға көбейтіп екінші жолға, және үшінші жолды 3-ке көбейтіп бірінші жолға қоссақ онда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 13 & 0 & -39 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

түріндегі матрицаны аламыз. Екінші жолды 13-ке қысқартамыз

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Екінші жолды (-2)-ге көбейтіп бірінші жолға қоссақ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

матрицасын аламыз. Олай болса жүйенің шешімі $x=1,\ y=-3,\ z=5$.

6. $\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ 4x+5y-6z=0 \\ 2x+11y-2z=0 \end{cases}$ біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табыңыз.

Шешімі: Жүйенің анықтауышын есептесек

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix}=10-36+88-20+24-66=0,$$

онда жүйенің шексіз көп шешімдері болады. $r(A)=2,\ n=3$ болғандықтан, кез келген екі теңдеуін аламыз:

$$\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ 4x+5y-6z=0. \end{cases}$$

Жүйесінің шешімін табу үшін z белгісізін белгілі деп есептеп, x, y белгісіздерін табамыз. Ол үшін жүйені

$$\begin{cases} -x+3y=-2z \\ 4x+5y=6z \end{cases}$$

түрінде жазып,

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, y=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

Крамер формуласы көмегімен

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-5-12=-17,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -2z & 3 \\ 6z & 5 \end{vmatrix}=-10z-18z=-28z,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & -2z \\ 4 & 6z \end{vmatrix}=-6z+8z=2z.$$

анықтауыштарын есептейміз.

Бұдан

$$x=\frac{28}{17}z, \quad y=-\frac{2}{17}z$$

Егер $z=17\cdot t$ деп алсақ, мұнда $t-$ кез келген тұрақты сан, онда берілген жүйенің шешімі

$x = 28 \cdot t, \quad y = -2 \cdot t, \quad z = 17 \cdot t$
болады.