## Тәжірибелік сабақ №1

# 14. Кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шамалар және олардың үлестірімділік заңы. Биноминалдық және Пуассон үлестірімділігі. Дискретті кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары және олардың қолданысы

**14.1-мысал:**

Топта 20 студент бар. $X$ – тақтаға шақырылатын студенттердің тізімдегі нөмірі болсын.

Мүмкін мәндер жиыны:
1, 2, 3,…20 – сандар;

Мүмкін мәндері әртүрлі, сондықтан $X$ айнымалысы студент шақырылмай тұрып белгісіз болмақ. Демек, $X$ – кездейсоқ шама.

| Бақылау түрі: | |
|---|---|
| Дифференциалдық есеп | |
| Аты-жөні | орта балл |
| 1. Абилкасимов Али Алимжанулы | 0 |
| 2. Агжолтай Абилхасам | 75,63 |
| 3. Аманбек Айдын | 78,51 |
| 4. Бердиял Бекболат | 0 |
| 5. Болат Жалел Маратұлы | 73,79 |
| 6. Брөн Елнұр Біржанұлы | 2,5 |
| 7. Ермек Нұрай Бекболатқызы | 0 |
| 8. Жұмағалиева Ақмарал | 31,27 |
| 9. Жұмақан Бекжан Сәкенұлы | 70,79 |
| 10. Қазиева Жанғаным Қайратқызы | 75,65 |
| 11. Махмет Еркежан Сайранқызы | 72,3 |
| 12. Монтоо Эсенбол | 79,97 |
| 13. Нұржанова Гүлнұр Нұржанқызы | 50,65 |
| 14. Орман Аружан Полатқызы | 74,16 |
| 15. Орынбек Жанайдар Болатбекұлы | 73,67 |
| 16. Рахат Жанибек | 0 |
| 17. Сагатова Дильназ Қанатқызы | 53,73 |
| 18. Сәбит Азамат Ерденұлы | 77,85 |
| 19. Серикбаева Аружан Еркиновна | 74,1 |
| 20. Тасеменов Әлібек Сәндібекұлы | 51,33 |

**14.2-мысал:**

$X$ – тақтаға шақырылатын студенттердің аты болсын.

$X$ – бұл жағдайда айнымалы шама, бірақ мәндері сан емес (Али, Абилхасам, Айдын,…);

Демек, $X$ – кездейсоқ шама емес.

| Бақылау түрі: | |
|---|---|
| Дифференциалдық есеп | |
| Аты-жөні | орта балл |
| Абилкасимов Али Алимжанулы | 0 |
| Агжолтай Абилхасам | 75,63 |
| Аманбек Айдын | 78,51 |
| Бердиял Бекболат | 0 |
| Болат Жалел Маратұлы | 73,79 |

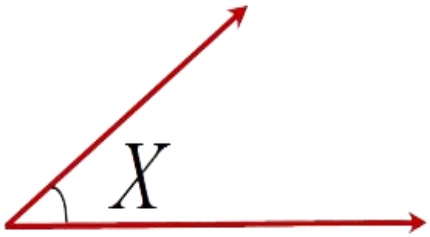
**14.3-мысал:**



Ойын сүйегі 6 ұпай түскенше тасталынды.
$X$ – сүйектің тасталыну саны болсын.
$X$ – *1, 2, 3,…* – сандар, $X$ – айнымалы шама алдын ала неше болатыны белгісіз.
Демек, $X$ – кездейсоқ шама.

- *Мысал 14.1-де айнымалы шаманың мәндер жиыны ақырлы,*
- *Мысал 14.3-те айнымалы шаманың мәндер жиыны ақырсыз.*

**14.4-мысал:**
$X$ – сағат тілдерінің арасындағы бұрыштардың кішісі болсын.




Мүмкін мәндер жиыны: $[0, \pi]$ болсын.
Егер тілдер беттессе, онда
$$X = 0.$$
Егер тілдер қарама-қарсы бағытталса, онда
$$X = \pi.$$

Алдын ала $X$ неге тең болатыны белгісіз.
Бұл шаманың ерекшелігі: мүмкін мәндер жиыны – тұтас аралық болады.

Мәндер жиынының түріне қарай кездейсоқ шамалар екі түрге бөлінеді: *дискретті* және *үзіліссіз*.

**14.5-мысал:**
$X$ - екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен сандар қосындысы болсын.
Онда
$$\Omega = \{1,\ldots,6\}^2$$
және
$X(\Omega) = \{2,3,\ldots,12\}$ болады.
$(X = 4) = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$,

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$$(X \le 4) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,1),(2,1),(2,2),(3,1)\} = (X=2) \cup (X=3) \cup (X=4).$$

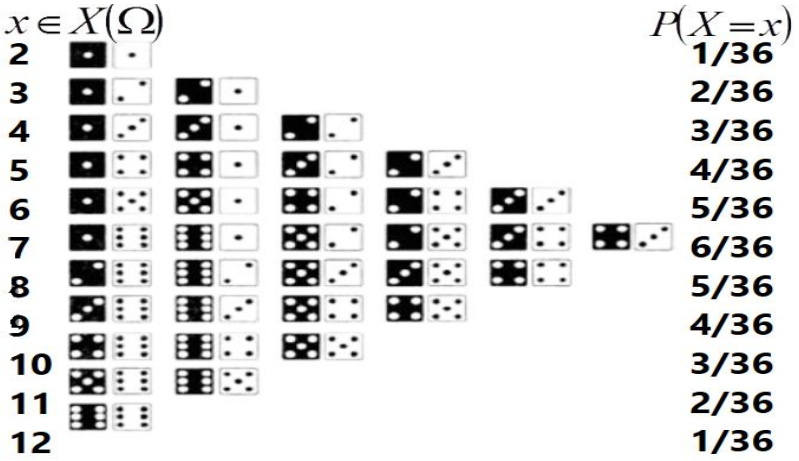
**14.6-мысал:**

$X$ - екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен сандар қосындысы болсын. $X$ кездейсоқ шамасының тарату заңын құрыңыз.

*Шешімі:* $X$ кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің жиыны

$$X(\Omega) = \{2, 3, ..., 12\}$$

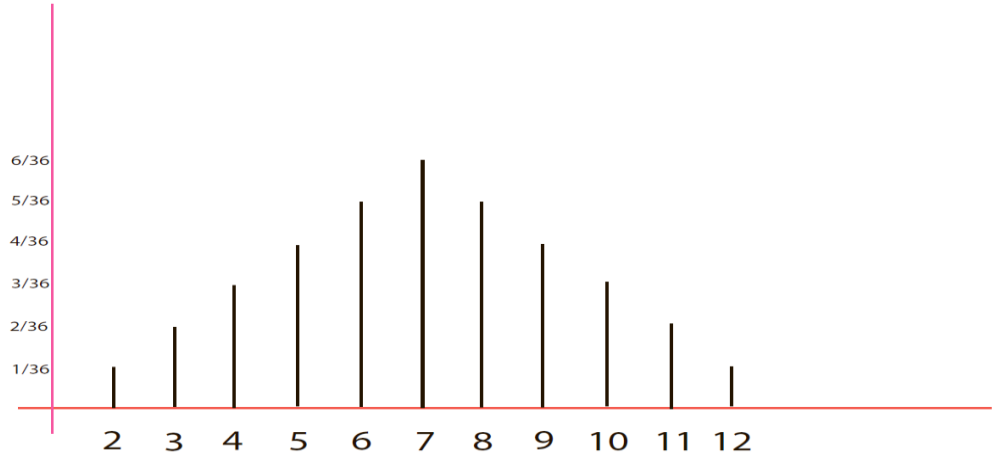
| $x \in X(\Omega)$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |




$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1$ қажетті шартының орындалуын тексерейік:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + ... + \frac{1}{36} = 1.$$

Осы заңның сызба түріндегі бейнелеуін келтірейік:



**14.7-мысал:** Топтағы 25 студенттің үшеуі емтиханды екіге, жетеуі – үшке, тоғызы – төртке, алтауы – беске тапсырды.
Топ студентінің бағасының математикалық күтімін табыңыз.
*Шешімі:* $X$ – топ студентінің бағасы болсын. Бізге $E(X)$ табу керек.
$X$ кездейсоқ шамасының тарату заңын құрамыз.
$X$ кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің жиыны $X(\Omega)=\{2,3,4,5\}$.
$X$ кездейсоқ шамасының әрбір мәнінің қабылдану ықтималдықтарын табамыз:

$$p_1 = P(X=2)=\frac{3}{25}, \qquad p_3 = P(X=4)=\frac{9}{25},$$

$$p_2 = P(X=3)=\frac{7}{25}, \qquad p_4 = P(X=5)=\frac{6}{25}.$$

Топ студентінің бағасының, яғни $X$ кездейсоқ шамасының тарату заңын құрамыз:

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{7}{25}$ | $\frac{9}{25}$ | $\frac{6}{25}$ |

Топ студентінің бағасының математикалық күтімін табамыз:

$$E(X)=2\cdot\frac{3}{25}+3\cdot\frac{7}{25}+4\cdot\frac{9}{25}+5\cdot\frac{6}{25}=3{,}72.$$

*Ескерту.* топ студентінің бағасының

$$\text{X}_{\text{орта мәні}}=\frac{2\cdot3+3\cdot7+4\cdot9+5\cdot6+}{25}=2\cdot\frac{3}{25}+3\cdot\frac{7}{25}+4\cdot\frac{9}{25}+5\cdot\frac{6}{25}$$

орташа мәні мен $E(X)$ күтілетін мәндерін салыстырсақ, $\text{E(X)}=\text{X}_{\text{орта мәні}}$ теңдігін, яғни кездейсоқ шаманың күтілетін мәнінің сол шаманың орта мәнін беретінін көреміз. Айырмашылығы орта мән анықтамасы бойынша кездейсоқ шаманың мәндерінің саны арқылы табылса, тарату заңы бойынша кездейсоқ шаманың мәндерінің қабылдану ықтималдықтары (салмақтары, коэффициенттері) арқылы табылады.

*Ескерту.* Бірдей заңды кездейсоқ шамалардың орташа мәндері де бірдей болады.
Бірақ орташа мәндерінің бірдейлігінен заңдарының бірдейлігі шықпайды.
Мысалы,

| $X$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,8 | 0,2 |

және

| $Y$ | -1 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0,5 | 0,5 |

заңдарымен берілген $X$ және $Y$ шамаларының орташа мәндері бірдей, $E(X)=E(Y)=0$, ал заңдары әртүрлі.

**14.8-мысал:**

$$E(X^2)=\sum_{x\in X(\Omega)}x^2P(X=x);$$

$$E(2X^2+X+1)=\sum_{x\in X(\Omega)}(2X^2+X+1)P(X=x);$$

$$E(e^x)=\sum_{x\in X(\Omega)}e^xP(X=x).$$

**14.9-мысал:**

$X$ - екі ойын сүйегінде түскен сандардың қосындысы болсын. $X$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімін табыңыз.

*Шешімі:* $X_1$ - бірінші сүйекте түскен, $X_2$ - екінші сүйекте түскен сан болсын. Онда, $X=X_1+X_2$ болатындықтан, тұжырым бойынша

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)$$

болады.

$X_1$ және $X_2$ - кездейсоқ шамалары бірдей заңды болғандықтан $E(X_1)=E(X_2)$ болады да, соңғы теңдіктен

$$E(X)=E(X_1)+E(X_1)=2E(X_1)$$

теңдігі шығады.

$X_1$ кездейсоқ шамасы

| $x\in X(\Omega)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{6}$ |

заңымен таратылған. Онда математикалық күтімнің анықтамасы бойынша

$$E(X_1)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$$

болады да,

$$E(X)=2E(X_1)=2\cdot\frac{21}{6}=7$$

болады.

**14.10-мысал:**

Біз құстардың сақинасын сынағымыз келеді. Әрбір сақина $1-p$ ықтималдығымен ақаулы және $p=0{,}98$. Сақиналардың арасында тәуелсіздік бар деп есептейік.

Біз $n$ сақиналарды тексерудің екі әдісін салыстырғымыз келеді:

1) Біз әр сақинаны тексереміз, сондықтан біз $n$ сынақ жасаймыз.

2) Біз жаһандық сынақ жасаймыз. Егер бұл сынақ теріс болса, онда барлық сақиналар дұрыс. Кері жағдайда, біз әрбір сақинаны тексереміз. Сынақтардың санына тең кездейсоқ шама ретінде $X_n$ алынсын.

а) Заңды және $X_n$ шамасының орта мәнін көрсетіңіз.

ә) $f:\begin{matrix}[2,+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 1-xp^x\end{matrix}$ болсын. $[2,\alpha[$ интервалында $f<0$ және $]\alpha,+\infty[$ интервалында $f<0$ болатындай бір ғана $\alpha>0$ болатынын көрсетіңіз.

б) Ең үнемді әдіс қандай ($n$-ге байланысты)?

*Шешімі:*

а) Заң және $X_n$ шамасының орта мәні:

$X_n(\Omega)=\{1,n+1\}$;

$P(X_n=1)=p^n,\ P(X_n=n+1)=1-p^n$;

$E(X_n)=p^n+(n+1)(1-p^n)$.

ә) $f(x)=1-xe^{x\ln p}$, $f'(x)=e^{x\ln p}(-x\ln p-1)$.

$-\frac{1}{\ln p}=0{,}25<2$, онда $f$ өседі;

$f(2)=1-2p^2=-0{,}92$ және $\lim\limits_{+\infty} f(x)=1$, $f$ үзіліссіз, онда $[2,\alpha[$ интервалында $f<0$ және $]\alpha,+\infty[$ интервалында $f<0$ болатындай бір ғана $\alpha>0$ болады.

б) $n$-ге қатысты үнемді әдіс:

$E(X_n)<n\Leftrightarrow -np^n+1<0\Leftrightarrow f(n)<0\Leftrightarrow n<\alpha$.

**14.11-мысал:** Екі түрлі түсті (бір ақ және бір қызыл) $2n+1$ тиын лақтырыңыз. Бір түс (және бір ғана) тақ рет пайда болады. Осы тақ санға тең кездейсоқ шама ретінде $X$ алынсын. Оның заңын және оның орташа мәнін көрсетіңіз.

*Шешімі:*

$X(\Omega)=\{1,3,...,2n+1\}$

$\forall k\in\{0,...,n\}$, $X=2k+1\Leftrightarrow 2k+1$ тиындар қызыл немесе $2k+1$ тиын ақ береді. Олай болса

$$P(X=2k+1)=2\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=2k+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{(1+1)^{2n+1}-(1-1)^{2n+1}}{2}=1,$$

$$E(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{2n+1}{2k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k},$$

$$E(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(2n+1)\frac{(1+1)^{2n+1}-(1-1)^{2n+1}}{2}=\frac{2n+1}{2}.$$

**14.12-мысал:**

$A$ қорабында 2 шар, ал $B$ қорабында 5 шар бар. Бір қорап бос болғанша $A$ немесе $B$ қорабына кездейсоқ шар аламыз.

$X$ басқа қораптағы шарлар санына тең кездейсоқ шама болсын. $X$ заңын және орташа мәнін көрсетіңіз.

*Шешімі:* $X(\Omega)=\{1,...,5\}$.

$A_i=$«$i$-ші сәтте $A$-дан допты таңда»,

$B_i=$«$i$-ші сәтте $B$-дан допты таңда» болсын.

$$P(X=5)=P(A_1\cap A_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$P(X=4)=P(A_1\cap B_2\cap A_3)+P(B_1\cap A_2\cap A_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$X=3\Leftrightarrow$ «біз 3 бірінші таңдау кезінде екі рет $B$ таңдаймыз және 4-ші рет $A$ таңдаймыз».

$$P(X=3)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=3\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$X=2\Leftrightarrow$ «біз $A$-ны 5-ші рет босатамыз немесе $B$-ны босатамыз»

$$P(X=2)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

$X=1\Leftrightarrow$ «біз 5 бірінші таңдау кезінде бір рет $A$ және 4 рет $B$ таңдаймыз»

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

*Тексеру*: $\sum_{k=1}^{5}P(X=k)=1$.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{5}kP(X=k)=\frac{105}{32}.$$

**14.13-мысал:** Нысананы тәуелсіз 6 рет оқ атылды. Әрқайсысында оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p=0{,}9$. Атылған тәуелсіз 6 оқтың тура төртеуінің нысанаға тию ықтималдығын табыңыз.

*Шешімі:*

a) $n$ тәуелсіз сынақта $A$ оқиғасының тура $k$ рет пайда болу ықтималдығы

$P_n(k)=P_{k,n}=C_n^k\cdot p^k q^{n-k}$

*Бернулли формуласымен* есептеледі, мұндағы $q=1-p$ (n неғұрлым аз болса).

b) оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p=0{,}9$, бұдан $q=0{,}1$.

Сынақтар саны $n$=6, ал $k$=4. Демек

$$P_6(4)=\frac{6!}{4!\cdot 2!}(0{,}9)^4\cdot(0{,}1)^2=0{,}984.$$

c) Жауабы: $P(A)\approx 0{,}984$.

**14.14-мысал:** Әрбір 21 тәуелсіз сынақта оқиға тұрақты 0,2 ықтималдықпен пайда болады. Ең ықтимал санды табу керек.

*Шешімі:*

a) p ықтималдығы ең үлкен мән қабылдайтын $k=k_0$ мәнін *ең ықтимал сан* деп атаймыз:

$$np-q\le k_0\le np+p. \qquad (14.3.2)$$

b) n=21 тәуелсіз сынақта $A$ оқиғасының ықтималдығы p=0,2, мұндағы $q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$ ең үлкен мән қабылдайтын $k=k_0$ мәнін ең ықтимал сан деп атаймыз:

$np - q \le k_0 \le np + p \Rightarrow 21 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le k_0 \le 21 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \Rightarrow 3{,}4 \le k_0 \le 4{,}4$ Ж ауабы: $k_0 = 3.$

**14.15-мысал:** Егер А оқиғасының әр сынақта орындалу ықтималдығы p = 0,2 –ге тең болса, онда 200 тәуелсіз сынақтарда А оқиғасының

a) 40 рет орындалу ықтималдығын;

b) 60 реттен 80 ретке дейін орындалу ықтималдықтарын табу керек.

*Шешімі:*

a) *Лаплас теоремалары.* $n$ - өте үлкен сан және $p > 0{,}1$ болған жағдайда, Лапластың локалдық немесе интегралдық теоремасын қолданамыз.

*Лапластың локалдық теоремасы.* Тәуелсіз $n$ сынақ жүргізілгенде $A$ оқиғасының тура $k$ рет пайда болу ықтималдығы келесі формуламен жуықтап есептеледі:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

мұндағы $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$.

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының мәнін кестеден табамыз және $\varphi(-x) = \varphi(x).$

*Лапластың интегралдық теоремасы.* Тәуелсіз $n$ сынақ жүргізу нәтижесінде $A$ оқиғасының $k_1$ -ден кем емес және $k_2$ -ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы келесі формуламен жуықтап есептеледі:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Бұл формуладағы

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \ ,$$

Лаплас функциясы, мұндағы $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ және $\Phi(-x) = -\Phi(x).$

b) *а)* есеп шарты бойынша: $n = 200; k = 40; p = 0{,}2; q = 0{,}8$

Муавр Лапластың локалдық формуласын қолдансақ:

$$P_{200}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \varphi(x)$$

бұдан $x = \frac{40 - 200 \cdot 0{,}2}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$

Кестеден $\varphi(0) = 0{,}3989$, осыдан ізделінді ықтималдық:

$$P_{200}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}07$$

*б)* 60 реттен 80 ретке дейін орындалу ықтималдығын табайық, есеп шарты бойынша:

$n = 200; k_1 = 60; k_2 = 80; p = 0{,}2; q = 0{,}8$

Муавр Лапластың интегралдық формуласын қолданайық:

$P_{200}(60{,}80) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Интегралдың жоғарғы және төменгі шектерін есептейік:

$$x_1 = \frac{60 - 200 \cdot 0{,}2}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx 3{,}54, \qquad x_2 = \frac{80 - 200 \cdot 0{,}2}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx 7{,}07.$$

Сонымен: $P_{200}(60{,}80) \approx \Phi(7{,}07) - \Phi(3{,}54)$, кестеден

$\Phi(7{,}07) \approx 0{,}5; \quad \Phi(3{,}54) \approx 0{,}4996$.

Бұдан ізделінді ықтималдық:

$P_{200}(60{,}80) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0{,}5 - 0{,}4996 \approx 0{,}0004.$

c) Жауабы: $P_{200}(40) \approx 0{,}07$, $P_{200}(60{,}80) \approx 0{,}0004.$

**14.16-мысал:** Телефон станциясында әрбір қоңырау шалу кезінде ақау болу ықтималдығы 0,002. Барлығы 1000 қоңырау шалынған болса, оның ішінде 9 ақау болу ықтималдығын табыңыз.

*Шешімі:*

a) Егер n өте үлкен сан, ал p өте аз шама ( $npq < 9$ болатындай) және $\lambda = np$ шамасы тұрақты болған жағдайда Пуассон формуласы қолданылады.

*Пуассон теоремасы.* Егер $n \to \infty, p \to 0$ болып және $\lambda = np \neq 0$ шамасы тұрақты болса, онда

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

b) Есептің шарты бойынша: n=1000, k=9, p=0,002.
Пуассон формуласы бойынша есептесек:

$$P_{1000}(9) = \frac{(1000 \cdot 0{,}002)^9}{9!} e^{-2} \approx 0{,}00019.$$

c) Жауабы: $P_{1000}(9) \approx 0{,}00019.$